АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

ТОМ II
ВЫПУСК
2

1957

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том II И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ *Выпуск 2*
1957

СОСТАВ РЕДКОЛЛЕГИИ:

Бернштейн С. Н., ***Гнеденко Б. В.***, ***Золотарев В. М.***, (ответственный секретарь), ***Колмогоров А. Н.*** (главный редактор), ***Королюк В. С.*** (зам. гл. редактора), ***Линник Ю. В.***, ***Сарымсаков Т. А.***, ***Смирнов Н. В.***, ***Хинчин А. Я.***

СОДЕРЖАНИЕ

Скороход А. В. Предельные теоремы для случайных процессов с независимыми приращениями 145
Skorohod A. V. Limit theorems for stochastic processes with independent increments 177
Saad K. Nasr. On the convergence, basic distributions and classification of abstract random variables 178
Саад К. Наср. О сходимости, совместных распределениях и классификации абстрактных случайных величин 186
Юшкевич А. А. О строго марковских процессах 187
Yushkevič A. A. On strong Markov processes 212
Рихтер В. Локальные предельные теоремы для больших уклонений 214
Richter W. Lokale Grenzwertsätze für große Abweichungen 229
Волконский В. А. Многомерная предельная теорема для однородных цепей Маркова со счетным множеством состояний 230
Volkonsky V. A. A multidimensional limit theorem for Markov chains with a countable set of states 255

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Золотарев В. М. Уточнение ряда теорем теории ветвящихся случайных процессов 256
Zolotarev V. M. More exact statements of several theorems in the theory of branching processes 266
Климов В. Н. Кинетическое уравнение для примесей 266
Klimov V. N. The kinetic equation for mixtures 274
Розанов Ю. А. О локальной предельной теореме для решетчатых распределений 275
Rozanov Yu. A. On a local limit theorem for lattice distributions 281
Ченцов Н. Н. Многопараметрическое броуновское движение Леви и обобщенный белый шум 281
Čentsov N. N. Le mouvement brownien à plusieurs paramètres de M. Lévy et le bruit blanc généralisé 282
Zbyněk Šidák. On relations between strict sense and wide sense conditional expectations. 283
Збынек Шидак. Об отношениях между условными математическими ожиданиями в узком смысле и в широком смысле 288

Адрес редакции: Москва, В-234, МГУ, Мех.-матем. факультет, тел. В 9-18-01

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том II И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ Выпуск 2
1957

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ С НЕЗАВИСИМЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ

А. В. СКОРОХОД

Введение

В предыдущей статье [8] введены некоторые топологии в пространстве функций, не имеющих разрывов второго рода, и найдены необходимые и достаточные условия, которые нужно наложить на последовательность процессов $\xi_n(t)$, чтобы для всех функционалов f, непрерывных в какой-либо из этих топологий, распределение $f(\xi_n(t))$ сходилось к распределению $f(\xi_n(t))$, где $\xi_0(t)$ некоторый случайный процесс. Эти общие предельные теоремы применяются в настоящей работе для получения различных предельных теорем в том частном случае, когда процессы $\xi_n(t)$ и $\xi_0(t)$ являются процессами с независимыми приращениями. Здесь удается получить гораздо более эффективные результаты, чем общие теоремы [8].

Вопрос о сходимости последовательности процессов с независимыми приращениями рассматривался многими авторами. Назовем здесь работы А. Н. Колмогорова [1], [2], М. Донскера [3], И. И. Гихмана [4] и Ю. В. Прохорова [5], [6]. В [1], [2], [3], [5] рассматривается сходимость к винеровскому процессу $\xi_0(t)$ процессов $\xi_n(t)$, построенных по суммам независимых случайных величин, т. е. имеющих вид:

$$\xi_n(t) = \sum_{i \leqslant k} \xi_{n,i} \text{ при } t_{n,k} \leqslant t < t_{n,k+1}, \tag{1}$$

где $\xi_{n,1}, \xi_{n,2}, \ldots, \xi_{n,n}$ — независимые случайные величины, а $t_{n,1}, t_{n,2}, \ldots, t_{n,n}$ — некоторая последовательность точек. И. И. Гихман в [4] изучил при некоторых предположениях сходимость процессов вида (1) к процессу, траектории которого могут иметь разрывы. Автор в [7] сформулировал теорему, дающую необходимые и достаточные условия сходимости распределений $f(\xi_n(t))$ к $f(\xi_0(t))$ для весьма широкого класса функционалов в том случае, когда $\xi_{n,i}$ в (1) одинаково распределены, $t_{n,i}$ делят отрезок $[0,1]$ на равные части, а $\xi_0(t)$ произвольный однородный процесс с независимыми приращениями. Эта теорема была обобщена Ю. В. Прохоровым в [6] на случай различно распределенных величин.

Работа состоит из пяти параграфов и заключения. В §§ 1—4 изучается сходимость процессов на прямой, а § 5 содержит обобщение основных результатов на процессы в банаховом пространстве.

В § 1 приведены некоторые свойства процессов с независимыми приращениями, которые нужны при выводе предельных теорем. Рассуждения, которые применяются при этом, часто встречаются при изучении независимых случайных величин; сошлемся на [9], [10], а также [11], глава 4.

§ 2 и 3 содержат основные предельные теоремы. § 2 посвящен предельным теоремам для $\mathbf{J}_1$-непрерывных функционалов, а в § 3 более подробно рассматривается случай процессов, построенных по суммам независимых одинаково распределенных величин.

В § 4 приводятся некоторые результаты, относящиеся к сходимости распределений функционалов, непрерывных в других топологиях, введенных в [8].

В заключении указываются некоторые задачи, относящиеся к рассматриваемому кругу вопросов, но не затронутые в этой статье.

Настоящую статью естественно рассматривать как продолжение [8], поэтому многочисленные ссылки на [8] необходимы.

Я считаю необходимым указать здесь еще на одно обстоятельство. Во всех предельных теоремах в качестве первого условия приводится условие сходимости конечномерных распределений процесса $\xi_n(t)$ к конечномерным распределениям процесса $\xi_0(t)$. Мы не рассматриваем специально этот вопрос, так как для самого интересного случая, когда $\xi_0(t)$ стохастически непрерывный процесс на прямой, условия сходимости конечномерных распределений $\xi_n(t)$ к конечномерным распределениям $\xi_0(t)$ совпадают с условиями сходимости распределения $\xi_n(t)$ к распределению $\xi_0(t)$ при каждом t, а эти условия легко получить из общих теорем о сходимости распределений сумм бесконечно малых независимых слагаемых к безгранично делимым распределениям, содержащихся в [12], § 25. Из этих же теорем можно получить и условия сходимости конечномерных распределений $\xi_n(t)$ к конечномерным распределениям $\xi_0(t)$ в том случае, когда $\xi_0(t)$ стохастически непрерывный процесс с независимыми приращениями в пространстве конечного числа измерений. Для бесконечномерного банахова пространства такие условия еще не выяснены.

При написании этой статьи я учитывал многочисленные советы Е. Б. Дынкина. Выражаю ему глубокую признательность за оказанное внимание.

§ 1. Некоторые свойства процессов с независимыми приращениями

Мы будем рассматривать в § 1—4 только числовые процессы с независимыми приращениями. Все процессы, которые мы будем рассматривать, будут определены для всех t из $[0,1]$. Довольно подробно теория процессов с независимыми приращениями изложена в [11], глава 8. В этом параграфе мы изучим некоторые свойства процессов с независимыми приращениями, которые будут использоваться впоследствии при доказательстве предельных теорем в § 2—4.

1.1. Определение. *Процесс $\xi(t)$ стохастически непрерывен справа в точке t_0, если для каждого $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{\substack{t>t_0\\ t\to t_0}} \mathbf{P}\{|\xi(t) - \xi(t_0)| > \varepsilon\} = 0; \tag{1.1}$$

Процесс $\xi(t)$ *имеет в точке* t_0 *стохастический предел справа, если существует случайная величина* $\xi(t_0+0)$, *такая, что для всякого* $\varepsilon>0$

$$\lim_{\substack{t>t_0\\ t\to t_0}} \mathbf{P}\{|\xi(t)-\xi(t_0+0)|>\varepsilon\}=0. \tag{1.2}$$

Необходимым и достаточным условием существования у процесса с независимыми приращениями $\xi(t)$ стохастического предела справа в точке t_0 является условие: для каждого $\varepsilon>0$

$$\lim_{\substack{t>\tau>t_0\\ t\to t_0}} \mathbf{P}\{|\xi(t)-\xi(\tau)|>\varepsilon\}=0. \tag{1.3}$$

Аналогично определяется *стохастическая непрерывность слева и существование стохастического предела слева*. Процесс стохастически непрерывный справа и слева в каждой точке $t_0\in[0,1]$ называется *стохастически непрерывным*.

Из результатов [11], глава 8, можно вывести следующее заключение:
1.2. Если процесс с независимыми приращениями $\xi(t)$ стохастически непрерывен справа, имеет в каждой точке пределы слева и $\mathbf{P}\{\xi(1-0)=\xi(1)\}=1$, то существует такой процесс $\xi'(t)$, что $\mathbf{P}\{\xi(t)=\xi'(t)\}=1$ для каждого t из $[0,1]$ и траектории процесса $\xi'(t)$ с вероятностью 1 принадлежат K.

Через K в §§ 1—4 мы обозначаем пространство K_X (см. [8], § 2) для того случая, когда X — вещественная прямая.

В дальнейшем, нигде этого специально не оговаривая, мы будем рассматривать только такие процессы с независимыми приращениями, траектории которых с вероятностью 1 принадлежат K. По возможности мы будем писать вместо «процесс с независимыми приращениями» просто «процесс».

Приступим к доказательству нескольких лемм, вывод которых и является основной целью § 1.

1.3. **Лемма.** *Пусть* $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_k$ — *независимые случайные величины,*

$$S_i=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_i,\quad i\leqslant k \text{ и } \mathbf{P}\{|S_k-S_i|>a\}\leqslant\alpha<1$$

для $i=1,2,\ldots,k-1$.

Тогда

$$\mathbf{P}\{\sup_{i=1,2,\ldots,k}|S_i|>2a\}\leqslant\frac{1}{1-\alpha}\mathbf{P}\{|S_k|>a\}.$$

Доказательство. Обозначим через η ту из сумм S_i, для которой $|S_i|\geqslant|S_j|$ и $|S_i|>|S_j|$, если $j<i$. Легко видеть, что

$$\mathbf{P}\{|S_k|>a\,|\,\eta>2a\}\geqslant 1-\alpha,$$

а значит

$$\mathbf{P}\{|S_k|>a,\quad|\eta|>2a\}\geqslant(1-\alpha)\mathbf{P}\{|\eta|>2a\}.$$

Поэтому

$$\mathbf{P}\{\sup_{i=1,\ldots,k}|S_i|>2a\}=\mathbf{P}\{|\eta|>2a\}\leqslant\frac{1}{1-\alpha}\mathbf{P}\{|S_k|>a\},$$

что и требовалось доказать.

Используя то обстоятельство, что траектории процесса $\xi(t)$ с вероятностью 1 принадлежат K, из 1.3 легко получить

1.4. **Лемма.** *Пусть для* $\xi(t)$ *выполняется*

$$\sup_{t_1 \leqslant t \leqslant t_2} \mathbf{P}\{|\xi(t) - \xi(t_2)| > a\} \leqslant \alpha < 1. \tag{1.4}$$

Тогда

$$\mathbf{P}\{\sup_{t_1 \leqslant t \leqslant t_2} |\xi(t) - \xi(t_1)| > 2a\} \leqslant \frac{1}{1-\alpha} \mathbf{P}\{|\xi(t_2) - \xi(t_1)| > a\}. \tag{1.5}$$

1.5. **Лемма.** *Пусть* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ *— независимые случайные величины,* $S_i = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_i$ *и* $\mathbf{P}\{|S_k - S_i| > a\} \leqslant \alpha < 1$ *для* $i = 1, 2, \ldots, k-1$. *Тогда*

$$\prod_{i=1}^{k} \mathbf{P}\{|\xi_i| \leqslant 4a\} \geqslant 1 - \frac{1}{1-\alpha} \mathbf{P}\{|S_k| > a\}. \tag{1.6}$$

Действительно,

$$\prod_{i=1}^{k} \mathbf{P}\{|\xi_i| \leqslant 4a\} = \mathbf{P}\{\sup_{i=1,\ldots,k} |\xi_i| \leqslant 4a\} \geqslant$$

$$\geqslant \mathbf{P}\{\sup_{i=1,\ldots,k} |S_i| \leqslant 2a\} \geqslant 1 - \frac{1}{1-\alpha} \mathbf{P}\{|S_k| > a\},$$

на основании 1.3.

1.6. **Лемма.** *Если траектории процесса* $\xi(t)$ *с вероятностью* 1 *принадлежат* K, *то для каждого* $\varepsilon > 0$

$$\lim_{c \to 0} \Delta^P_{J_1}(c, \xi(t), \varepsilon) = 0,$$

где

$$\Delta^P_{J_1}(c, \xi(t), \varepsilon) =$$

$$= \sup_{t-c \leqslant t_1 < t < t_2 \leqslant t+c} \min[\mathbf{P}\{|\xi(t) - \xi(t_1)| > \varepsilon\}; \mathbf{P}\{|\xi(t_2) - \xi(t)| > \varepsilon\}]. \tag{1.7}$$

Доказательство.

$$(\Delta^P_{J_1}(c, \xi(t), \varepsilon))^2 \leqslant \sup_{t-c \leqslant t_1 < t < t_2 \leqslant t+c} \mathbf{P}\{\min[|\xi(t) - \xi(t_1)|; \; |\xi(t_2) - \xi(t)|] > \varepsilon\} \leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{P}\{\sup_{t-c \leqslant t_1 < t < t_2 \leqslant t-c} \min[\xi(t) - \xi(t_1); \quad |\xi(t_2) - \xi(t)|] > \varepsilon\}.$$

Последнее выражение стремится к нулю при $c \to 0$ на основании 2.1.4 [8], так как $\xi(t)$ с вероятностью 1 принадлежит K. Лемма доказана.

Величина $\Delta^P_{J_1}(c, \xi(t), \varepsilon)$ позволяет в свою очередь оценить

$$\mathbf{P}\{\Delta_{J_1}(c, \xi(t)) > \varepsilon\}. *$$

Этому посвящена лемма 1.8, которая будет существенно использовать

1.7. **Лемма.** *Пусть* $\bar{c}$ *таково, что* $\Delta^P_{J_1}\left(\bar{c}, \xi(t), \frac{\varepsilon}{5}\right) < \frac{1}{3}$. *Тогда, каковы бы ни были* $t_0 < t_1 < \ldots < t_N$,

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{P}\{|\xi(t_i) - \xi(t_{i-1})| > \varepsilon\} \leqslant \left(\frac{2}{\bar{c}} + 1\right)(\log 2 + 1). \tag{1.8}$$

* Относительно обозначений см. 2.6.1 [8].

Доказательство. Пусть точки $0 = \bar{t}_0 < \bar{t}_1 < \ldots < \bar{t}_k$ таковы, что $\mathbf{P}\left\{|\xi(t) - \xi(\bar{t}_i)| > \frac{\varepsilon}{4}\right\} < \frac{1}{3}$ для

$$\bar{t}_i < t < \bar{t}_{i+1}; \quad \mathbf{P}\left\{|\xi\bar{t}_{i+1}) - \xi(\bar{t}_i)| \geqslant \frac{\varepsilon}{4}\right\} \geqslant \frac{1}{3};$$

$$i = 0, 1, \ldots, k-1; \quad \mathbf{P}\left\{\left|\xi(\bar{t}_k) - \xi(t)\right| > \frac{\varepsilon}{4}\right\} < \frac{1}{3} \text{ для } \bar{t}_k < t \leqslant 1.$$

По определению $\bar{c}$, на отрезке длины $\bar{c}$ может лежать не более двух точек $\bar{t}_i$, так что $k \leqslant 2/\bar{c}$. Если теперь $\bar{t}_i \leqslant t_{i_1} < t_{i_1+1} < \ldots < t_{i_1+r} < \bar{t}_{i+1}$, то

$$\sum_{i_1}^{i_1+r-1} \mathbf{P}\{|\xi(t_{j+1}) - \xi(t_j)| > \varepsilon\} =$$

$$= -\log \exp\left[-\sum_{i_1}^{i_1+r-1} \mathbf{P}\{|\xi(t_{j+1}) - \xi(t_j)| > \varepsilon\}\right] =$$

$$= -\log \prod_{i_1}^{i_1+r-1} \exp\left[-\mathbf{P}\{|\xi(t_{j+1}) - \xi(t_j)| > \varepsilon\}\right] \leqslant -$$

$$-\log \prod_{i_1}^{i_1+r-1} \mathbf{P}\{|\xi(t_{j+1}) - \xi(t_j)| \leqslant \varepsilon\} \leqslant -\log\left[\mathbf{P}\{|\xi(\bar{t}_i) - \xi(t_{i_1})| < \varepsilon\} \times\right.$$

$$\left. \times \prod_{i_1}^{i_1+r-1} \mathbf{P}\{|\xi(t_{j+1}) - \xi(t_j)| \leqslant \varepsilon\}\right] \leqslant$$

$$\leqslant -\log\left(1 - \frac{1}{1-\frac{1}{3}} \mathbf{P}\left\{|\xi(\bar{t}_i) - \xi(t_{i_1+r})| < \frac{\varepsilon}{4}\right\}\right) \leqslant \log 2.$$

Мы воспользовались неравенством $e^{-x} > 1 - x$ и 1.5. Если обозначить через i_s наименьший из номеров, для которого $t_{i_s} > \bar{t}_s$, то получим:

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{P}\{|\xi(t_i) - \xi(t_{i-1})| > \varepsilon\} =$$

$$= \sum_{s=0}^{k} \sum_{j=i_s}^{i_{s+1}-2} \mathbf{P}\{|\xi(t_{j-1}) - \xi(t_j)| > \varepsilon\} + \sum_{s=1}^{k} \mathbf{P}\{|\xi(t_{i_s}) - \xi(t_{i_s-1})| > \varepsilon\} \leqslant$$

$$\leqslant (k+1)\log 2 + k \leqslant (k+1)(\log 2 + 1) < \left(\frac{2}{\bar{c}} + 1\right)(\log 2 + 1).$$

Лемма доказана.

1.8. **Лемма.** *Пусть $\bar{c}$ таково, что $\Delta^P_{J_1}\left(\bar{c}, \xi(t), \frac{\varepsilon}{20}\right) < \frac{1}{3}$. Тогда, если l некоторое натуральное число, для которого $\frac{3}{l} < \bar{c}$, то*

$$\mathbf{P}\left\{\Delta_{J_1}\left(\frac{1}{l}, \xi(t)\right) > \varepsilon\right\} \leqslant 12 \frac{\Delta^P_{J_1}\left(\frac{3}{l}, \xi(t), \frac{\varepsilon}{12}\right)}{\left[1 - 3\Delta^P_{J_1}\left(\frac{3}{l}, \xi(t), \frac{\varepsilon}{12}\right)\right]^2} \left(\frac{2}{c} + 1\right)(\log 2 + 1). \tag{1.9}$$

Доказательство. Событие $\left\{\Delta_{J_1}\left(\frac{1}{l}, \xi(t)\right) > \varepsilon\right\}$ влечет одно из

событий $\mathfrak{B}_k$, заключающихся в том, что в интервале $\left(\frac{k}{l}, \frac{k+3}{l}\right)$ найдется точка t_1, для которой $\left|\xi(t)-\xi\left(\frac{k}{l}\right)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$, если $\frac{k}{l}<t<t_1$, а $\left|\xi(t_1)-\right.$ $\left.-\xi\left(\frac{k}{l}\right)\right|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}$ и, кроме того, $\sup\limits_{t_1<t\leqslant\frac{k+3}{l}}|\xi(t)-\xi(t_1)|>\frac{\varepsilon}{2}$.

Поэтому

$$\mathbf{P}\left\{\Delta_{\mathbf{J}_1}\left(\frac{1}{l},\ \xi(t)\right)>\varepsilon\right\}\leqslant\sum_{k=0}^{l-1}\mathbf{P}\{\mathfrak{B}_k\}. \tag{1.10}$$

Оценим $\mathbf{P}\{\mathfrak{B}_k\}$. Возможны два случая: 1) существует такое t^* в интервале $\left(\frac{k}{l}, \frac{k+3}{l}\right)$, что

$$\mathbf{P}\left\{|\xi(t^*)-\xi(t^*-0)|>\frac{\varepsilon}{12}\right\}\geqslant\Delta^P_{\mathbf{J}_1}\left(\frac{3}{l},\xi(t),\frac{\varepsilon}{12}\right),$$

тогда

$$\sup_{\frac{k}{l}\leqslant t<t^*}\mathbf{P}\left\{|\xi(t)-\xi(t^*-0)|>\frac{\varepsilon}{12}\right\}\leqslant\Delta^P_{\mathbf{J}_1}\left(\frac{3}{l},\xi(t),\frac{\varepsilon}{12}\right), \tag{1.11}$$

$$\sup_{t^*\leqslant t\leqslant\frac{k+3}{l}}\mathbf{P}\left\{|\xi(t)-\xi(t^*)|>\frac{\varepsilon}{12}\right\}\leqslant\Delta^P_{\mathbf{J}_1}\left(\frac{3}{l},\xi(t),\frac{\varepsilon}{12}\right); \tag{1.12}$$

2) для всех $t\in\left(\frac{k}{l}, \frac{k+3}{l}\right)$ $\mathbf{P}\left\{|\xi(t)-\xi(t-0)|>\frac{\varepsilon}{12}\right\}<\Delta^P_{\mathbf{J}_1}\left(\frac{3}{l},\xi(t),\frac{\varepsilon}{12}\right)$. В первом случае будем иметь

$$\mathbf{P}\{\mathfrak{B}_k\}=\int\limits_{\frac{k}{l}\leqslant\tau<t^*}\mathbf{P}\left\{\sup_{\tau<t<\frac{k+3}{l}}|\xi(t)-\xi(\tau)|>\frac{\varepsilon}{2}\,\middle|\,t_1=\tau\right\}\mathbf{P}\{t_1\in d\tau\}+$$

$$+\int\limits_{t^*\leqslant\tau\leqslant\frac{k+3}{l}}\mathbf{P}\left\{\sup_{\tau<t<\frac{k+3}{l}}|\xi(t)-\xi(\tau)|>\frac{\varepsilon}{2}\,\middle|\,t_1=\tau\right\}\mathbf{P}\{t_1\in d\tau\}. \tag{1.13}$$

Если $\sup\limits_{k\,|\,l\leqslant\tau\leqslant(k+3)\,|\,l}\mathbf{P}\left\{\left|\xi(\tau)-\xi\left(\frac{k+3}{l}\right)\right|>\frac{\varepsilon}{4}\right\}\leqslant\frac{1}{2}$, то из (1.13) на основании 1.4 можно получить

$$\mathbf{P}\{\mathfrak{B}_k\}\leqslant 2\sup_{\frac{k}{l}<\tau\leqslant\frac{k+3}{l}}\mathbf{P}\left\{\left|\xi(\tau)-\xi\left(\frac{k+3}{l}\right)\right|>\frac{\varepsilon}{4}\right\}\times$$

$$\times\,\mathbf{P}\left\{\sup_{\frac{k}{l}\leqslant\tau<t^*}\left|\xi(t)-\xi\left(\frac{k}{l}\right)\right|>\frac{\varepsilon}{2}\right\}+$$

$$+\frac{\sup\limits_{t^*\leqslant t\leqslant\frac{k+3}{l}}\mathbf{P}\left\{|\xi(t)-\xi(t^*)|>\frac{\varepsilon}{4}\right\}}{1-\sup\limits_{t^*\leqslant t\leqslant\frac{k+3}{l}}\mathbf{P}\left\{|\xi(t)-\xi(t^*)|>\frac{\varepsilon}{4}\right\}}\mathbf{P}\left\{\sup_{\frac{k}{l}\leqslant t\leqslant\frac{k+3}{l}}\left|\xi(t)-\xi\left(\frac{k}{l}\right)\right|>\frac{\varepsilon}{2}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant 4\sup_{\frac{k}{l}\leqslant t\leqslant\frac{k+3}{l}}\mathbf{P}\left\{\left|\xi(t)-\xi\left(\frac{k+3}{l}\right)\right|>\frac{\varepsilon}{4}\right\}\frac{\Delta^P_{\mathbf{J}_1}\left(\frac{3}{l},\xi(t),\frac{\varepsilon}{12}\right)}{1-\Delta^P_{\mathbf{J}_1}\left(\frac{3}{l},\xi(t),\frac{\varepsilon}{12}\right)}$$

[последнее неравенство следует из того, что $\mathbf{P}\left\{|\xi(t')-\xi(t'')|>\frac{\varepsilon}{4}\right\}\leqslant$ $\leqslant\mathbf{P}\left\{|\xi(t')-\xi(t'')|>\frac{\varepsilon}{12}\right\}$, и (1.11) и (1.12)].

Если же $\sup\limits_{\frac{k}{l}\leqslant t\leqslant\frac{k+3}{l}}\mathbf{P}\left\{\left|\xi(t)-\xi\left(\frac{k}{l}\right)\right|>\frac{\varepsilon}{2}\right\}>\frac{1}{2}$, то

$$\mathbf{P}\{\mathfrak{B}_k\}\leqslant\mathbf{P}\left\{\sup_{\frac{k}{l}\leqslant t\leqslant t^*}\left|\xi(t)\xi\left(\frac{k}{l}\right)\right|>\frac{\varepsilon}{2}\right\}+\frac{\sup\limits_{t^*<t<\frac{k+3}{l}}\mathbf{P}\left\{|\xi(t)-\xi(t^*)|>\frac{\varepsilon}{4}\right\}}{1-\sup\limits_{t^*<t<\frac{k+3}{l}}\mathbf{P}\left\{|\varepsilon(t)-\xi(t^*)|>\frac{\varepsilon}{4}\right\}}\leqslant$$

$$\leqslant 2\,\frac{\Delta^P_{\mathbf{J}_1}\left(\frac{3}{l},\xi(t),\frac{\varepsilon}{12}\right)}{1-\Delta^P_{\mathbf{J}_1}\left(\frac{3}{l},\xi(t),\frac{\varepsilon}{12}\right)}\leqslant$$

$$\leqslant 4\sup_{\frac{k}{l}\leqslant t\leqslant\frac{k+3}{l}}\mathbf{P}\left\{\left|\xi(t)-\xi\left(\frac{k+3}{l}\right)\right|>\frac{\varepsilon}{4}\right\}\frac{\Delta^P_{\mathbf{J}_1}\left(\frac{3}{l},\xi(t),\frac{\varepsilon}{12}\right)}{1-\Delta^P_{\mathbf{J}_1}\left(\frac{3}{l},\xi(t),\frac{\varepsilon}{12}\right)}.$$

Во втором случае обозначим через $\bar{t}$ точку из $\left(\frac{k}{l},\frac{k+3}{l}\right)$, для которой $\mathbf{P}\left\{\left|\xi(\bar{t})-\xi\left(\frac{k}{l}\right)\right|\geqslant\frac{\varepsilon}{12}\right\}\geqslant\Delta^P_{\mathbf{J}_1}\left(\frac{3}{l},\xi(t),\frac{\varepsilon}{12}\right)$, а для $\frac{k}{l}<t<\bar{t}$.

$$\mathbf{P}\left\{\left|\xi(t)-\xi\left(\frac{k}{l}\right)\right|\geqslant\frac{\varepsilon}{12}\right\}<\Delta^P_{\mathbf{J}_1}\left(\frac{3}{l},\xi(t),\frac{\varepsilon}{12}\right).$$

Тогда получим для $\bar{t}<t\leqslant\frac{k+3}{l}$:

$$\mathbf{P}\left\{\left|\xi(t)-\xi\left(\frac{k}{l}\right)\right|\geqslant\frac{\varepsilon}{4}\right\}\leqslant\mathbf{P}\left\{\left|\xi(\bar{t}-0)-\xi\left(\frac{k}{l}\right)\right|>\frac{\varepsilon}{12}\right\}+$$

$$+\mathbf{P}\left\{|\xi(\bar{t})-\xi(\bar{t}-0)|>\frac{\varepsilon}{12}\right\}+$$

$$+\mathbf{P}\left\{|\xi(t)-\xi(\bar{t})|\geqslant\frac{\varepsilon}{12}\right\}\leqslant 3\Delta^P_{\mathbf{J}_1}\left(\frac{3}{l},\xi(t),\frac{\varepsilon}{12}\right),\qquad(1.14)$$

так как в этом случае $\mathbf{P}\left\{|\xi(\bar{t})-\xi(\bar{t}-0)|\geqslant\frac{\varepsilon}{12}\right\}<\Delta^P_{\mathbf{J}_1}\left(\frac{3}{l},\xi(t),\frac{\varepsilon}{12}\right)$, а $\mathbf{P}\left\{|\xi(\bar{t})-\xi(t)|\geqslant\frac{\varepsilon}{12}\right\}\leqslant\Delta^P_{\mathbf{J}_1}\left(\frac{3}{l},\xi(t),\frac{\varepsilon}{12}\right)$ для $\bar{t}<t<\frac{k+3}{l}$, ввиду того, что $\min\left[\mathbf{P}\left\{\left|\xi(\bar{t})-\xi\left(\frac{k}{l}\right)\right|\geqslant\frac{\varepsilon}{12}\right\};\ \mathbf{P}\left\{|\xi(t)-\xi(\bar{t})|\geqslant\frac{\varepsilon}{12}\right\}\right]\leqslant\Delta^P_{\mathbf{J}_1}\left(\frac{3}{l},\xi(t),\frac{\varepsilon}{12}\right)$.

Аналогично можно показать, что в этом случае

$$\mathbf{P}\left\{|\xi(t)-\xi(\tau)|\geqslant\frac{\varepsilon}{4}\right\}\leqslant 3\Delta^P_{\mathbf{J}_1}\left(\frac{3}{l},\xi(t),\frac{\varepsilon}{12}\right).\qquad(1.15)$$

Следовательно, на основании (1.15) и леммы 1.5

$$\mathbf{P}\{\mathfrak{B}_k\}=\int\limits_{\frac{k}{l}\leqslant\tau\leqslant\frac{k+3}{l}}\mathbf{P}\left\{\sup_{\tau<t\leqslant\frac{k+3}{l}}|\xi(t)-\xi(\tau)|>\frac{\varepsilon}{2}\,\middle|\,t_1=\tau\right\}\mathbf{P}\{t_1\in d\tau\}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{3\Delta^P_{\mathbf{J}_1}\left(\frac{3}{l},\xi(t),\frac{\varepsilon}{12}\right)}{\left(1-3\Delta^P_{\mathbf{J}_1}\left(\frac{3}{l},\xi(t),\frac{\varepsilon}{12}\right)\right)^2}\mathbf{P}\left\{\left|\xi\left(\frac{k+3}{l}\right)-\xi\left(\frac{k}{l}\right)\right|>\frac{\varepsilon}{4}\right\}.$$

Так что в любом случае

$$\mathbf{P}\{\mathfrak{B}_k\} \leqslant 4\,\frac{\Delta^P_{\mathbf{J}_1}\left(\frac{3}{l}, \xi(t), \frac{\varepsilon}{12}\right)}{\left[1-3\Delta^P_{\mathbf{J}_1}\left(\frac{3}{l}, \xi(t), \frac{\varepsilon}{12}\right)\right]^2} \sup_{\frac{k}{l}\leqslant t<\tau\leqslant\frac{k+3}{l}} \mathbf{P}\left\{|\xi(t)-\xi(\tau)|>\frac{\varepsilon}{4}\right\}. \quad (1.16)$$

Поэтому

$$\mathbf{P}\left\{\Delta_{\mathbf{J}_1}\left(\frac{1}{l}, \xi(t)\right)>\varepsilon\right\} \leqslant 4\,\frac{\Delta^P_{\mathbf{J}_1}\left(\frac{3}{l}, \xi(t), \frac{\varepsilon}{12}\right)}{\left[1-3\Delta_{\mathbf{J}_1}\left(\frac{3}{l}, \xi(t), \frac{\varepsilon}{12}\right)\right]^2} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{l-1} \sup_{\frac{k}{l}\leqslant\tau<t\leqslant\frac{k+3}{l}} \mathbf{P}\left\{|\xi(t)-\xi(\tau)|>\frac{\varepsilon}{4}\right\}. \quad (1.17)$$

Но

$$\sum_{k=0}^{l-1} \sup_{\frac{k}{l}\leqslant t<\tau\leqslant\frac{k+3}{l}} \mathbf{P}\left\{|\xi(\tau)-\xi(t)|>\frac{\varepsilon}{4}\right\} =$$

$$= \sum_{0\leqslant 3i<l} \sup_{\frac{3i}{l}\leqslant t<\tau\leqslant\frac{3(i+1)}{l}} \mathbf{P}\left\{|\xi(t)-\xi(\tau)|>\frac{\varepsilon}{4}\right\} +$$

$$+ \sum_{0\leqslant 3i+1<l} \sup_{\frac{3i+1}{l}\leqslant t<\tau\leqslant\frac{3i+4}{l}} \mathbf{P}\left\{|\xi(\tau)-\xi(t)|>\frac{3}{4}\right\} +$$

$$+ \sum_{0<3i+2<l} \sup_{\frac{3i+2}{l}\leqslant t<\tau\leqslant\frac{3i+5}{l}} \mathbf{P}\left\{|\xi(t)-\xi(\tau)|>\frac{\varepsilon}{4}\right\},$$

а каждая из этих сумм по лемме 1.7 не превосходит $\left(\frac{2}{c}+1\right)(\log 2+1)$, т. е.

$$\sum_{k=0}^{l-1} \sup_{\frac{k}{l}\leqslant t<\tau\leqslant\frac{k+3}{l}} \mathbf{P}\left\{|\xi(t)-\xi(\tau)|>\frac{\varepsilon}{4}\right\} \leqslant 3\left(\frac{2}{c}+1\right)(\log 2+1).$$

Этим и завершается доказательство леммы.

§ 2. Предельные теоремы для $\mathbf{J}_1$-непрерывных функционалов

Найдем сначала наиболее общие условия, при которых распределение $f(\xi_n(t))$ сходится к распределению $f(\xi_0(t))$, если f есть $\mathbf{J}_1$-непрерывный функционал.

2.1. **Теорема.** *Распределение $f(\xi_n(t))$ сходится к распределению $f(\xi_0(t))$ для любого $\mathbf{J}_1$-непрерывного функционала f тогда и только тогда, когда* а) *конечномерные распределения $\xi_n(t)$ сходятся к конечномерным распределениям $\xi_0(t)$ для t из некоторого всюду плотного на $[0,1]$ множества, содержащего 0 и 1* б) *для всякого $\varepsilon>0$*

$$\lim_{c\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\Delta^P_{\mathbf{J}_1}(c, \xi_n(t), \varepsilon) = 0. \quad (2.1)$$

Доказательство. Необходимость условий теоремы вытекает из 3.2.2 [8] и леммы 1.6. Достаточность будет доказана, ввиду 3.2.1 [8], если для каждого $\varepsilon>0$

$$\lim_{c\to 1}\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\mathbf{P}\{\Delta_{\mathbf{J}_i}(c,\xi_n(t))>\varepsilon\}=0. \tag{2.2}$$

Но из (2.1) следует, что можно выбрать такое $\bar{c}$, чтобы для всех

$$\Delta^P_{\mathbf{J}_i}\left(\bar{c},\,\xi_n(t),\,\frac{\varepsilon}{20}\right)<\frac{1}{3}. \tag{2.3}$$

Тогда (2.2) можно получить немедленно из леммы 1.8 и (2.1). Теорема доказана.

2.2. Замечание. В том случае, когда $\xi_0(t)$ стохастически непрерывный процесс, условие б) в теореме 2.1 можно заменить условием: б′) для всякого $\varepsilon>0$

$$\lim_{c\to 0}\overline{\lim_{n\to 0}}\sup_{|t_1-t_2|\leqslant c}\mathbf{P}\{|\xi_n(t_1)-\xi_n(t_2)|>\varepsilon\}=0. \tag{2.4}$$

Действительно, во-первых,

$$\Delta^P_{\mathbf{J}_i}(c,\xi_n(t),\varepsilon)\leqslant\sup_{|t_1-t_2|\leqslant c}\mathbf{P}\{|\xi_n(t_1)-\xi_n(t_2)|>\varepsilon\}. \tag{2.5}$$

так что, если выполнено условие б′, то выполнено и б). Во-вторых, если $t'<t_1<t_2<t''$, $|t_1-t'|<t_2-t_1$; $|t_2-t''|<t_2-t_1$,

$$\mathbf{P}\{|\xi_n(t_1)-\xi_n(t_2)|>\varepsilon\}\leqslant 2\,\Delta^P_{\mathbf{J}_i}\left(2(t_2-t_1),\ \xi_n(t),\ \frac{\varepsilon}{4}\right)+$$

$$+\,\mathbf{P}\left\{|\xi_n(t')-\xi_n(t'')|>\frac{\varepsilon}{2}\right\}. \tag{2.6}$$

Возьмем точки $0=\bar{t}_0<\bar{t}_1<\cdots<\bar{t}_N=1$, принадлежащие множеству, упомянутому в а) теоремы 2.1, так, чтобы $2c>\bar{t}_i-\bar{t}_{i-1}>c$. Тогда из (2.6) следует, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sup_{|t_1-t_2|\leqslant c}\mathbf{P}\{|\xi_n(t_1)-\xi_n(t_2)|>\varepsilon\}\leqslant 2\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\Delta^P_{\mathbf{J}_i}\left(2c,\,\xi_n(t),\frac{\varepsilon}{4}\right)+$$

$$+\sup_{i=0,1,\ldots,N-2}\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\mathbf{P}\left\{|\xi_n(\bar{t}_{i+2})-\xi_n(\bar{t}_i)|>\frac{\varepsilon}{2}\right\}\leqslant 2\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\Delta^P_{\mathbf{J}_i}\left(2c,\,\xi_n(t),\frac{\varepsilon}{4}\right)+$$

$$+\sup_{|t_1-t_i|\leqslant 4c}\mathbf{P}\left\{|\xi_0(t_1)-\xi_0(t_2)|>\frac{\varepsilon}{4}\right\},$$

так что, если выполнены условия а) и б) 2.1, а $\xi_0(t)$ стохастически непрерывный процесс, то выполнено и условие б′).

Эти общие условия позволяют найти более эффективные достаточные условия для того случая, когда $\xi_0(t)$ стохастически непрерывный процесс. Одно из таких условий можно получить в терминах функций

$$m_n(t)=\mathbf{E}\,\frac{\xi_n(t)}{1+|\xi_n(t)|}. \tag{2.7}$$

(**E**, как и всюду далее, — символ математического ожидания).

2.3. **Теорема**. *Пусть* $\xi_0(t)$ *стохастически непрерывный процесс, а для* $\xi_n(t)$ *выполнены условия*: а) *конечномерные распределения* $\xi_n(t)$ *сходятся к конечномерным распределениям* $\xi_0(t)$,

б) $$\sup_t|m_n(t)|\leqslant\alpha<1,$$

в) $$\lim_{c\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\sup_{|t_1-t_2|\leqslant c}|m_n(t_1)-m_n(t_2)|=0.$$

Тогда для любого $\mathbf{J}_1$*-непрерывного функционала* f *распределение* $f(\xi_n(t))$ *сходится к распределению* $f(\xi_0(t))$.

Для доказательства нам понадобятся несколько лемм.

2.4. **Лемма**. *Если выполнены условия теоремы 2.3 то для каждого* δ *можно указать такое* L, *что для всех* n *и* $t\in[0,1]$

$$\mathbf{P}\{|\xi_n(t)|>L\}<\delta.$$

Действительно, так как распределение $\xi_n(1)$ сходится к распределению $\xi_0(1)$, можно указать такое M, что $\mathbf{P}\{|\xi_n(1)|>M\}<\delta$ для всех n.

$$\delta>\mathbf{P}\{|\xi_n(t)+\xi_n(1)-\xi_n(t)|>M\}=\int\mathbf{P}\{|\xi_n(t)+x|>M\}\times$$
$$\times\,\mathbf{P}\{\xi_n(1)-\xi_n(t)\in dx\}\geqslant\inf_x\mathbf{P}\{|\xi_n(t)+x|>M\}.$$

Значит существует такое $x_n(t)$, что

$$\mathbf{P}\{|\xi_n(t)+x_n(t)|>M\}<\delta. \tag{2.8}$$

Из условия б) и (2.8) легко получить, что

$$|x_n(t)|\leqslant\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}+M\right)\frac{1}{1-\delta}+\frac{\delta}{1-\delta}, \tag{2.9}$$

а из (2.8) и (2.9) следует, что в качестве L (существование которого утверждает лемма) можно взять

$$L=\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}+M\right)\frac{1}{1-\delta}+\frac{\delta}{1-\delta}+M.$$

Из только что доказанной леммы немедленно следует

2.5. **Лемма**. *В условиях теоремы 2.3 существует такое* $\gamma>0$, *что для всех* n

$$\mathbf{E}\left(\sqrt{\frac{1}{1+|\xi_n(t)|}}\right)\geqslant\gamma. \tag{2.10}$$

Доказательство теоремы 2.3. На основании 2.2 нам достаточно показать, что для каждого $\varepsilon>0$

$$\lim_{c\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\sup_{|t_2-t_1|\leqslant c}\mathbf{P}\{|\xi_n(t_1)-\xi_n(t_2)|>\varepsilon\}=0. \tag{2.11}$$

Поскольку $\xi_0(t)$ стохастически непрерывный процесс, то

$$\lim_{c\to 0}\sup_{|t_1-t_2|\leqslant c}\mathbf{P}\left\{|\xi_0(t_1)-\xi_0(t_2)|>\frac{\varepsilon}{8}\right\}=0. \tag{2.12}$$

Каково бы ни было N, совместное распределение величин $\xi_n\left(\frac{i}{N}\right)$; $i=0,1,\ldots,N$, сходится к совместному распределению величин $\xi_0\left(\frac{i}{N}\right)$; $i=1,\ldots,N$. Поэтому для достаточно больших n и для всех $0\leqslant i\leqslant N-2$

$$\mathbf{P}\left\{\left|\xi_n\left(\frac{i+2}{N}\right)-\xi_n\left(\frac{i}{N}\right)\right|>\frac{\varepsilon}{4}\right\}<2\sup_{|t_1-t_2|\leqslant\frac{2}{N}}\mathbf{P}\left\{|\xi_0(t_1)-\xi_0(t_2)|>\frac{\varepsilon}{8}\right\}. \tag{2.13}$$

Пусть $\frac{i}{N} < t' < t'' < \frac{i+2}{N}$. Имеем

$$\mathbf{P}\left\{\left|\xi_n(t'') - \xi_n(t') + \xi_n\left(\frac{i+2}{N}\right) - \xi_n(t'') + \xi_n(t') - \xi_n\left(\frac{i}{N}\right)\right| > \frac{\varepsilon}{4}\right\} =$$

$$= \int \mathbf{P}\left\{|\xi_n(t'') - \xi_n(t') + x| > \frac{\varepsilon}{4}\right\} \mathbf{P}\left\{\xi_n\left(\frac{i+2}{N}\right) -$$

$$- \xi_n(t'') + \xi_n(t') - \xi_n\left(\frac{i}{N}\right) \in dx\right\} \geqslant \inf_x \mathbf{P}\left\{|\xi_n(t'') - \xi_n(t') + x| > \frac{\varepsilon}{4}\right\}.$$

Следовательно, существует такое $\bar{x}$, что

$$\mathbf{P}\left\{\xi_n(t'') - \xi_n(t') + \bar{x}| > \frac{\varepsilon}{4}\right\} < 2 \sup_{|t_1 - t_2| \leqslant \frac{2}{N}} \mathbf{P}\left\{|\xi_0(t_2) - \xi_0(t_1)| > \frac{\varepsilon}{8}\right\}. \tag{2.14}$$

Покажем, что

$$|\bar{x}| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{|m_n(t_2) - m_n(t_1)| + 6 \sup\limits_{|t_2 - t_1| \leqslant \frac{2}{N}} \mathbf{P}\left\{|\xi_0(t_2) - \xi_0(t_1)| > \frac{\varepsilon}{8}\right\}}{\gamma^4 - 2 \sup\limits_{|t_1 - t_2| \leqslant \frac{2}{N}} \mathbf{P}\left\{|\xi_0(t_2) - \xi_0(t_1)| > \frac{\varepsilon}{8}\right\}}, \tag{2.15}$$

где γ взято из (2.10)

Докажем это неравенство для $\bar{x} < 0$ (для $\bar{x} > 0$ оно доказывается аналогично). Если $\bar{x} > -\frac{\varepsilon}{4}$, то (2.15) выполняется. Пусть $\bar{x} < -\frac{\varepsilon}{4}$. Тогда

$$\frac{\xi_n(t_2)}{1 + |\xi_n(t_2)|} - \frac{\xi_n(t_1)}{1 + |\xi_n(t_1)|} = \frac{\xi_n(t_2) - \xi_n(t_1)}{(1 + |\xi_n(t_2)|)(1 + |\xi_n(t_1)|)} +$$

$$+ \frac{\xi_n(t_2)|\xi_n(t_1)| - |\xi_n(t_2)|\xi_n(t_1)}{(1 + |\xi_n(t_2)|)(1 + |\xi_n(t_1)|)}.$$

Возьмем математическое ожидание от обеих частей этого равенства. Слева получим $m_n(t_2) - m_n(t_1)$. Оценим математические ожидания слагаемых в правой части. Через $\mathbf{E}_{\{A\}}$ мы будем обозначать условное математическое ожидание при условии, что произошло событие $\{A\}$.

$$\mathbf{E}\frac{\xi_n(t_2) - \xi_n(t_1)}{(1 + |\xi_n(t_1)|)(1 + |\xi_n(t_2)|)} =$$

$$= \mathbf{E}_{\left\{|\xi_n(t_2) - \xi_n(t_1) + \bar{x}| > \frac{\varepsilon}{4}\right\}} \left(\frac{\xi_n(t_2) - \xi_n(t_1)}{(1 + |\xi_n(t_1)|)(1 + |\xi_n(t_2)|)}\right) \times$$

$$\times \mathbf{P}\left\{|\xi_n(t_2) - \xi_n(t_1) + \bar{x}| > \frac{\varepsilon}{4}\right\} +$$

$$+ \mathbf{E}_{\left\{|\xi_n(t_2) - \xi_n(t_1) + \bar{x}| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}\right\}} \left(\frac{\xi_n(t_2) - \xi_n(t_1)}{(1 + |\xi_n(t_1)|)(1 + |\xi_n(t_2)|)}\right) \times$$

$$\times \mathbf{P}\left\{|\xi_n(t_2) - \xi_n(t_1) + \bar{x}| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}\right\} \geqslant$$

$$\geqslant -\mathbf{P}\left\{|\xi_n(t_2)-\xi_n(t_1)+\bar{x}|>\frac{\varepsilon}{4}\right\}+\left(-\bar{x}-\frac{\varepsilon}{4}\right)\times$$

$$\times\ \mathbf{E}_{\left\{|\xi_n(t_2)-\xi_n(t_1)+\bar{x}|\leqslant\frac{\varepsilon}{4}\right\}}\left(\frac{1}{(1+|\xi_n(t_1)|)(1+|\xi_n(t_2)|)}\right)\times$$

$$\times\,\mathbf{P}\left\{|\xi_n(t_2)-\xi_n(t_1)+\bar{x}|\leqslant\frac{\varepsilon}{4}\right\}=-\mathbf{P}\left\{|\xi_n(t_2)-\xi_n(t_1)+\bar{x}|>\frac{\varepsilon}{4}\right\}+$$

$$+\left(-\bar{x}-\frac{\varepsilon}{4}\right)\left(\mathbf{E}\,\frac{1}{(1+|\xi_n(t_1)|)(1+|\xi_n(t_2)|)}-\right.$$

$$\left.-\,\mathbf{E}_{\left\{|\xi_n(t_2)-\xi_n(t_1)+\bar{x}|>\frac{\varepsilon}{4}\right\}}\frac{1}{(1+|\xi_n(t_1)|)(1+|\xi_n(t_2)|)}\times\right.$$

$$\left.\times\mathbf{P}\left\{|\xi_n(t_2)-\xi_n(t_1)+\bar{x}|\geqslant\frac{\varepsilon}{4}\right\}\right)\geqslant-\mathbf{P}\left\{|\xi_n(t_2)-\xi_n(t_1)+\bar{x}|>\frac{\varepsilon}{4}\right\}+$$

$$+\left(-\bar{x}-\frac{\varepsilon}{4}\right)\left[\gamma^4-\mathbf{P}\left\{|\xi_n(t_2)-\xi_n(t_1)+\bar{x}|>\frac{\varepsilon}{4}\right\}\right].$$

Аналогичным образом, учитывая, что

$$\frac{\xi_n(t_2)\,|\,\xi_n(t_1)\,|-\xi_n(t_1)\,|\,\xi_n(t_2)\,|}{(1+|\xi_n(t_1)|)(1+|\xi_n(t_2)|)}$$

положительно, если $|\xi_n(t_2)-\xi_n(t_1)|\leqslant\frac{\varepsilon}{4}$ и $\bar{x}<\frac{\varepsilon}{4}$, и что это выражение не превосходит 2, легко получить неравенство

$$\mathbf{E}\,\frac{\xi_n(t_2)\,|\,\xi_n(t_1)\,|-|\,\xi_n(t_2)\,|\,\xi_n(t_1)}{(1+|\xi_n(t_1)|)(1+|\xi_n(t_2)|)}\geqslant-2\mathbf{P}\left\{|\xi_n(t_2)-\xi_n(t_1)+\bar{x}|>\frac{\varepsilon}{4}\right\}.$$

так что $m_n(t_2)-m_n(t_1)\geqslant-3\mathbf{P}\left\{|\xi_n(t_2)-\xi_n(t_1)+\bar{x}|>\frac{\varepsilon}{4}\right\}+$

$$+\left(-\bar{x}-\frac{\varepsilon}{4}\right)\left(\gamma^4-\mathbf{P}\left\{|\xi_n(t_2)-\xi_n(t_1)+\bar{x}|>\frac{\varepsilon}{4}\right\}\right).$$

Из этого неравенства и (2.14) немедленно следует (2.15).

Выберем такое N, чтобы для всех достаточно больших n было $\bar{x}<\frac{\varepsilon}{2}$. Тогда на основании (2.14) будем иметь, если $|t''-t'|<\frac{1}{N}$,

$$\mathbf{P}\{|\xi_n(t'')-\xi_n(t')|<\varepsilon\}<2\sup_{|t_2-t_1|\leqslant\frac{2}{N}}\mathbf{P}\left\{|\xi_0(t_0)-\xi_0(t_1)|>\frac{\varepsilon}{8}\right\}.$$

откуда, ввиду (2.12) и следует (2.11). Теорема доказана.

Легко построить пример последовательности функций $\mathbf{J}_n(t)$, сходящейся к нулю, но не сходящейся равномерно. Если такую последовательность прибавить в какой-нибудь $\mathbf{J}_1$-сходящейся последовательности, сходимость топологии $\mathbf{J}_1$ нарушится. Оказывается, последовательность процессов $\xi_n(t)$, распределения которых сходятся к распределениям стохастически непрерывного процесса $\xi_0(t)$, можно рассматривать как испорченную только что описанным способом $\mathbf{J}_1$-сходящуюся последовательность процессов, Точнее говоря, имеет место

2.6. **Теорема**. *Пусть $\xi_0(t)$ — стохастически непрерывный процесс с независимыми приращениями, и конечномерные распределения $\xi_n(t)$ сходятся к конечномерным распределениям $\xi_0(t)$. Тогда существуют такие функ-*

ции $\bar{x}_n(t)$, *что* $\bar{x}_n(t) \to 0$ *при* $n \to x$ *и для любого* $\mathbf{J}_1$*-непрерывного функционала* f *распределение* $f(\xi_n(t) - \bar{x}_n(t))$ *сходится к распределению* $f(\xi_0(t))$.

Доказательство. Положим для $n = 0, 1, \ldots$

$$\varphi_n(a) = \mathbf{E}\frac{\xi_n(t) - a}{1 + |\xi_n(t) - a|}. \tag{2.16}$$

Легко убедиться, что функции $\varphi_n(a)$ являются строго монотонными функциями, причем $\varphi_n(-\infty) = -1$, $\varphi_n(+\infty) = 1$, а кроме того, $\varphi_n(a) \to \varphi(a)$ при $n \to \infty$. Обозначим через $x_n(t)$ единственный нуль функции $\varphi_n(a)$. Тогда $x_n(t)$ сходится к $x_0(t)$ при $n \to \infty$. Из стохастической непрерывности процесса $\xi_0(t)$ следует, что функция $x_0(t)$ непрерывна. Конечномерные распределения процессов $\tilde{\xi}_n(t) = \xi_n(t) - x_n(t)$ сходятся к конечномерным распределениям процесса $\xi_0(t) - x_0(t)$ и, кроме того, для этих процессов выполнены условия а) и б) теоремы 2.3. Поэтому для любого $\mathbf{J}_1$-непрерывного функционала F распределение $F(\xi_n(t) - x_n(t))$ сходится к распределению $F(\xi_0(t) - x_0(t))$. Заметим теперь, что, если $f(x(t))$ есть $\mathbf{J}_1$-непрерывный функционал, то и $f(x(t) + x_0(t))$, где $x_0(t)$ некоторая фиксированная непрерывная функция, будет $\mathbf{J}_1$-непрерывным функционалом. Беря вместо функционала F функционал $f(x(t) + x_0(t))$ и полагая $\bar{x}_n(t) = x_n(t) - x_0(t)$, мы и получим доказательство теоремы.

В заключение этого параграфа докажем одну теорему о сходимости однородных процессов с независимыми приращениями и процессов, построенных по суммам одинаково распределенных независимых случайных величин. Более подробно сходимость таких процессов рассмотрена в § 3.

2.7. **Теорема.** *Пусть* $\xi_0(t)$ *однородный процесс, а* $\xi_n(t)$ *либо однородные процессы, либо процессы, имеющие вид*:

$$\xi_n(t) = \sum_{k \leqslant t(n+1)} \xi_{n,k}, \tag{2.17}$$

где $\xi_{n,1}, \xi_{n,2}, \ldots, \xi_{n,n}$ *при каждом* n *независимые и одинаково распределенные величины. Тогда распределение* $f(\xi_n(t))$ *сходится к распределению* $f(\xi_0(t))$ *для каждого* $\mathbf{J}_1$*-непрерывного функционала* f, *если только распределение* $\xi_n(t)$ *сходится к распределению* $\xi_0(t)$ *для всех* t.

Доказательство. На основании 2.2 достаточно проверить, что для всякого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{c \to 0} \overline{\lim_{n \to \infty}} \sup_{0 < \tau < c} \mathbf{P}\{|\xi_n(\tau)| > \varepsilon\} = 0. \tag{2.18}$$

Пусть ε_m и η_m две последовательности положительных чисел, монотонно стремящиеся к нулю. Выберем монотонно стремящуюся к нулю последовательность h_m так, чтобы при $t \leqslant h_m$ было $\mathbf{P}\left\{|\xi_0(t)| > \frac{\varepsilon_m}{2}\right\} < \eta_m$. Обозначим n_m такой номер, что для $n > n_m$

$$\mathbf{P}\{|\xi_n(h_m)| > \varepsilon_m\} < \eta_m.$$

Для $t < h_m$ имеем

$$1 - \eta_m \leqslant \int \mathbf{P}\{|\xi_n(t) + x| < \varepsilon_m\}\, \mathbf{P}\{\xi_n(h_m) - \xi_n(t) \in dx\} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_x \mathbf{P}\{|\xi_n(t) + x| < \varepsilon_m\}.$$

Поэтому существует такое x, что

$$\mathbf{P}\{|\xi_n(t)+x|\leqslant\varepsilon_m\}>1-\gamma_m, \tag{2.19}$$

причем, если x_1 и x_2 оба удовлетворяют (2.19), то $|x_1-x_2|\leqslant 2\varepsilon_m$. Пусть $t_m^{(n)}<h_m$ и $x_m^{(n)}$ таковы, что

$$\mathbf{P}\{|\xi_n(t_m^{(n)})+x_m^{(n)}|\leqslant\varepsilon_m\}>1-\gamma_m$$

и, если $\mathbf{P}\{|\xi_n(t)+x|\leqslant\varepsilon_m\}>1-\gamma_n$ для некоторого $t<h_m$, то $|x|<|x_m^{(n)}|+2\varepsilon_m$. Для доказательства (2.18) нам достаточно показать, что

$$\lim_{m\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|x_m^{(n)}|=0. \tag{2.20}$$

Предположим, что (2.20) не выполняется. Тогда существуют последовательности $m_k\to\infty$ и $n'_k>n_{m_k}$, а также число $\eta>0$, такие, что $|x_{m_k}^{(n'_k)}|>\eta>0$. Положим, $t_{m_k}^{(n'_k)}=\tau_k$,

$$\bar\xi_{k,i}=\xi_{n'_k}(i\tau_k)-\xi_{n'_k}((i-1)\tau_k);\qquad i=1,2,\ldots,\left[\frac{1}{\tau_k}\right],$$

$$\xi_{k,l_k}=\xi_{n'_k}(1)-\xi_{n'_k}\left(\left[\frac{1}{\tau_k}\right]\tau_k\right),\quad l_k=\left[\frac{1}{\tau_k}\right]+1.$$

$$\left(\left[\frac{1}{\tau_k}\right]-\text{целая часть }\left(\frac{1}{\tau_k}\right)\right).$$

Величины $\bar\xi_{k,1},\ldots,\bar\xi_{k,l_k}$ независимы между собой и $S_k=\sum_{i=1}^{l_k}\bar\xi_{k,i}=\xi_{n'_k}(1)$. Поскольку распределение $\xi_{n'_k}(1)$ сходится к распределению $\xi_0(1)$, то какова бы ни была последовательность α_k, стремящаяся к нулю, величина $\alpha_k\sum_{i=1}^{l_k}\bar\xi_{k,i}$ сходится по вероятности к нулю. Поэтому на основании [12], стр. 112—117, должна быть ограничена сумма

$$\sum_{i=1}^{l_k}\left(\alpha_k\bar m_{k,i}+\int\limits_{|z-\bar m_{k,i}|\leqslant\frac{1}{\alpha_k}} z\mathbf{P}\{\bar\xi_{k,i}\in dz\}\right), \tag{2.21}$$

где $\bar m_{k,i}$ медианы величин $\bar\xi_{k,i}$. Но $\bar m_{k,i}>\frac{\eta}{2}$ при достаточно больших k для $i\leqslant l_k-1$, а $\bar m_{k,l_k}<\bar m_{k,1}+4\varepsilon_{m_k}$. Поэтому

$$\left|\sum_{i=1}^{l_k}\left(\alpha_k\bar m_{k,i}+\int\limits_{|z-\bar m_{k,i}|\leqslant\frac{1}{\alpha_k}} z\mathbf{P}\{\bar\xi_{k,i}\in dz\}\right)\right|\geqslant$$

$$\geqslant\alpha_k\,\frac{l_k-2}{2}\,\eta-4\varepsilon_{m_k}-\frac{l_k}{\alpha_k}\,\gamma_{m_k}-2l_k\varepsilon_{m_k},$$

а это выражение не может быть ограниченным, если выбрать α_k так, чтобы $\alpha_k l_k\to\infty$, $\frac{\gamma_{m_k}}{\alpha_k^2}\to 0$ и $\frac{\varepsilon_{m_k}}{\alpha_k}\to 0$. Полученное противоречие убеждает нас в справедливости (2.20), а следовательно, и теоремы.

§ 3. Предельные теоремы для U-непрерывных функционалов

В этом параграфе мы рассматриваем сходимость стохастически непрерывных процессов друг к другу, а также сходимость процессов, построенных по суммам независимых, одинаково распределенных величин, к однородному процессу с независимыми приращениями. Функционал f, непрерывный в топологии равномерной сходимости U, мы будем называть измеримым, если он измерим относительно минимального борелевского поля множеств, содержащего все цилиндрические множества.

Пусть $\xi(t)$ стохастически непрерывный процесс. Введем величину

$$\lambda(t_0, \xi(t), A) = \lim_{\sup|t_i - t_{i-1}| \to 0} \sup_{0 \leqslant t_1 < t_2 < \cdots t_k < t_0} \sum \mathbf{P}\{\xi(t_i) - \xi(t_{i-1}) \in A\}.$$

В силу 1.7 эта величина конечна, если A лежит вне некоторой окрестности нуля. Как не трудно показать, она является математическим ожиданием числа скачков $\xi(t)$ [под скачком $x(t)$ в точке τ мы понимаем $x(\tau + 0) - x(\tau - 0)$], принадлежащих A и происшедших за время t_0.

3.1. **Теорема**. *Пусть $\xi_n(t)$ — последовательность стохастически непрерывных процессов. Распределение $f(\xi_n(t))$ сходится к распределению $f(\xi_0(t))$ для любого U-непрерывного и измеримого функционала f тогда и только тогда, когда*

а) *конечномерные распределения $\xi_n(t)$ сходятся к конечномерным распределениям $\xi_0(t)$,*

б) *для каждого $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{c \to 0} \overline{\lim_{n \to \infty}} \sup_{|t_1 - t_2| \leqslant c} \mathbf{P}\{|\xi_n(t_2) - \xi_n(t_1)| < \varepsilon\} = 0,$$

в) *$\lambda(\tau, \xi_n(t), A)$ сходится по вариации к $\lambda(\tau, \xi_0(t), A)$ как функция τ при $n \to \infty$ для всякого A, лежащего вне некоторой окрестности 0 и такого, что*

$$\lambda(1, \xi_0(t), \quad \overline{A \cap X/A}) = 0. \tag{3.1}$$

Доказательство. Необходимость условий а) и б) очевидна, так как всякий U-непрерывный функционал будет также и $\mathbf{J}_1$-непрерывным. Необходимость условия в) следует из того, что число скачков, принадлежащих A и происшедших на произвольном борелевском временном множестве B, является почти всюду U-непрерывным измеримым функционалом, если выполнено (3.1) и, следовательно, распределение числа скачков $\xi_n(t)$, принадлежащих A и происшедших при $t \in B$, сходится к распределению числа скачков $\xi_0(t)$, принадлежащих A и происшедших при $t \in B$. Но обе эти величины распределены по закону Пуассона, первая с параметром $\int_B d_\tau \lambda(\tau, \xi_n(t), A)$, а вторая с параметром $\int_B d_\tau \lambda(\tau, \xi_0(t), A)$.

Из сходимости распределений следует, что

$$\lim_{n \to \infty} \int_B d_\tau \lambda(\tau, \xi_n(t), A = \int_B d_\tau \lambda(\tau, \xi_0(t), A) \tag{3.2}$$

для любого борелевского множества B. А это возможно лишь в том случае, когда выполнено условие в).

Достаточность. Применим теорему 3.3.1 [8]. Ввиду 2.2 и условий а) и б) теоремы, условие б) теоремы 3.3.1 [8] выполнено. Остается проверить условие а) 3.3.1 [8], т. е. показать, что

$$\lim_{n\to\infty} |\mathbf{P}\{\xi_n(t_1)\in A_1, \ldots, \xi_n(t_k)\in A_k;\ \tau^{(\varepsilon)}_{n,1}\in B_1, \ldots, \tau^{(\varepsilon)}_{n,m}\in B_m,\ \nu^{\varepsilon}_n = m\} -$$
$$-\mathbf{P}\{\xi_0(t_1)\in A_1, \ldots, \xi_0(t_k)\in A_k;\ \tau^{(\varepsilon)}_{0,1}\in B_1, \ldots, \tau^{(\varepsilon)}_{0,m}\in B_m,\ \nu^{\varepsilon}_n = m\}| = 0 \quad (3.3)$$

равномерно по $B_1, B_2, \ldots, B_m$. Здесь $A_1, \ldots, A_k$ — борелевские множества на прямой, для которых выполнено $\mathbf{P}\{\xi_0(t_i)\in \overline{A_i}\cap\overline{X\setminus A_i}\} = 0$, $B_1, B_2, \ldots, B_m$ — борелевские множества на $[0,1]$, а $\tau^{(\varepsilon)}_{n,1} < \tau^{(\varepsilon)}_{n,2} < \ldots$ $\ldots < \tau^{(\varepsilon)}_{n,\nu^{\varepsilon}_n}$ — все точки, где размер скачков $\xi_n(t)$ превосходит ε, само же ε таково, что $\xi_0(t)$ с вероятностью 1 не имеет скачков размера ε. Обозначим через $\xi^{\varepsilon}_n(t)$ процесс, определяемый соотношением

$$\xi^{\varepsilon}_n(t) = \sum_{\substack{\tau\leqslant t\\ |\xi_n(\tau)-\xi_n(\tau-0)|>\varepsilon}} (\xi_n(\tau) - \xi_n(\tau-0)),\ n = 0,1,\ldots$$

Процессы $\xi^{\varepsilon}_n(t)$ и $\xi_n(t) - \xi^{\varepsilon}_n(t)$ являются независимыми между собой стохастически непрерывными процессами с независимыми приращениями, причем процесс $\xi_n(t) - \xi^{\varepsilon}_n(t)$ с вероятностью 1 не имеет скачков, размеры которых превосходят ε, а процесс $\xi^{\varepsilon}_n(t)$ с вероятностью 1 имеет лишь конечное число точек роста, причем в них происходят скачки размера более ε. Поэтому нам достаточно проверить (3.3) для процессов $\xi^{\varepsilon}_n(t)$. Предположим, что существует такая последовательность точек $x_1, x_2, \ldots, x_N, \ldots$, что

$$\sum_i \mathbf{P}\{\xi^{\varepsilon}_n(t_2) - \xi^{\varepsilon}_n(t_1) = x_i\} = 1. \quad (3.4)$$

Чтобы получить общий случай из этого, рассмотрим точки $\tau^{(\varepsilon)}_{n,1}, \tau^{(\varepsilon)}_{n,2}, \ldots, \tau^{(\varepsilon)}_{n,\nu^{\varepsilon}_n}$ скачков процесса $\xi^{\varepsilon}_n(t)$ и пусть $\sigma^{\varepsilon}_{n,1}, \ldots, \sigma^{\varepsilon}_{n,\nu^{\varepsilon}_n}$ величины скачков в этих точках. Построим новый процесс $\bar{\xi}^{\varepsilon}_n(t)$, имеющий скачки в тех же точках, что и $\xi^{\varepsilon}_n(t)$, но величины этих скачков соответственно равны $\Psi(\sigma^{\varepsilon}_{n,1}), \ldots, \Psi(\sigma^{\varepsilon}_{n,\nu^{\varepsilon}_n})$, где Ψ принимает лишь счетное множество значений и $|\Psi(x) - x| < \delta$. Тогда

$$\mathbf{P}\{|\bar{\xi}^{\varepsilon}_n(t) - \xi^{\varepsilon}_n(t)| > r\delta\} < \mathbf{P}\{\nu^{\varepsilon}_n > r\},$$

т. е. процессы $\xi^{\varepsilon}_n(t)$ могут быть равномерно приближены с какой угодно степенью точности процессами, для которых выполнено (3.4).

Поскольку $\mathbf{P}\{\xi^{\varepsilon}_n(t_1)=x_{i_1}, \ldots, \xi^{\varepsilon}_n(t_k)=x_{i_k};\ \tau^{(\varepsilon)}_{n,1}\in B_1, \ldots, \tau^{(\varepsilon)}_{n,m}\in B_m,\ \nu^{\varepsilon}_n = m\} =$

$$= \sum_{m_1+m_2+\ldots+m_{k+1}=m} \mathbf{P}\{\xi^{\varepsilon}_n(t_1) = x_{i_1}, \ldots, \xi^{\varepsilon}_n(t_k) = x_{i_k};\ \tau^{(\varepsilon)}_{n,1}\in B_1\cap[0,t_1], \ldots$$
$$\ldots, \tau^{(\varepsilon)}_{n,m_1}\in B_{m_1}\cap[0,t_1], \ldots, \tau_{n,mj+m_2+\ldots+m_j+1}\in B_{m_1+m_2+\ldots+m_j+1}\cap(t_j,t_{j+1}], \ldots$$
$$\ldots, \tau_{n,m}\in B_m\cap(t_k,1];\ \nu^{\varepsilon}_{1,n} = m_1,\ \nu^{\varepsilon}_{2,n} = m_2, \ldots, \nu^{\varepsilon}_{k+1,n} = m_{k+1}\} =$$
$$= \sum_{m_1+m_2+\ldots m_{k+1}=m} \prod_{j-1} \mathbf{P}\{\xi^{\varepsilon}_n(t_j) - \xi^{\varepsilon}_n(t_{j-1}) = x_{i_j} - x_{i_{j-1}},\ \tau^{(\varepsilon)}_{n,m_1+m_2+\ldots+m_{j-1}+1}\in$$
$$\in B_{m_1+\ldots+m_{j-1}+1}\cap(t_{j-1},t_j], \ldots, \tau^{(\varepsilon)}_{n,m_1+\ldots+m_j}\in B_{m_1+\ldots+m_j}\cap(t_{j-1},t_j],\ \nu^{\varepsilon}_{j,m}=m_j\};$$

(здесь $\nu^{\varepsilon}_{1,n}, \nu^{\varepsilon}_{2,n}, \ldots, \nu^{\varepsilon}_{k+1,n}$ обозначают соответственно число точек $\tau^{(\varepsilon)}_{n,j}$ на интервалах $[0,t_1], (t_1,t_2], \ldots, (t_k,1]$; $t_0 = 0$, $x_{i_0} = 0$, $m_0 = 0$, $t_{k+1} = t_k$,

$x_{i_{k+1}}=x_{i_k}$), то достаточно оценить один член произведения, стоящего под знаком суммы. Теорема будет доказана, если мы покажем, что равномерно по $B_1, B_2, \ldots, B_m$

$$\lim_{n\to\infty}|\mathbf{P}\{\xi_n^\varepsilon(1)=x_j,\ \tau_{n,1}^{(\varepsilon)}\in B_1,\ldots,\tau_{n,m}^{(\varepsilon)}\in B_m,\ \nu_n^\varepsilon=m\}-$$

$$-\mathbf{P}\{\xi_0^\varepsilon(1)=x_j,\ \tau_{0,1}^{(\varepsilon)}\in B_1,\ldots,\tau_{0,m}^{(\varepsilon)}\in B_m\nu_0^\varepsilon=m\}|=0, \tag{3.5}$$

так как каждый член произведения, о котором мы говорили только что, оценивается таким же образом. Имеем

$$\mathbf{P}\{\xi_n^\varepsilon(1)=x_j,\ t_1\leqslant\tau_{n,1}^{(\varepsilon)}<t_1'\leqslant t_2\leqslant\tau_{n,2}^{(\varepsilon)}<t_2'\leqslant\ldots\leqslant t_m\leqslant\tau_{n,m}^{(\varepsilon)}<t_m',\ \nu_n^\varepsilon=m\}=$$

$$=\sum_{x_{i_1}+x_{i_2}+\ldots+x_{i_m}=x_j}\exp\Big[-\sum_{i=1}^{\infty}\lambda(1,\xi_n(t),\{x_i\})\Big]\prod_{r=1}^{m}\times$$

$$\times[\lambda(t_r',\xi_n(t)\{x_{i_r}\})-\lambda(t_r,\xi_n(t)\{x_{i_r}\})],$$

$$\mathbf{P}\{\xi_n^\varepsilon(1)=x_j;\ \tau_{n,1}^{(\varepsilon)}\in B_1,\ldots,\tau_{n,m}^{(\varepsilon)}\in B_m,\ \nu_n^\varepsilon=m\}= \tag{3.6}$$

$$=\exp\Big[-\sum_{i=1}^{\infty}\lambda(1,\xi_n(t),\{x_i\})\Big]\sum_{x_{i_1}+x_{i_2}+\ldots+x_{i_m}=x_j}\ \int\limits_{\substack{t_r\in B_r\\ t_1<t_2<\ldots<t_m}}\cdots\int\ \prod_{r-1}^{m}d\lambda(t_r,\xi_n(t),\{x_{i_r}\}).$$

Из этой формулы, принимая во внимание, что $\lambda(t,\xi_n(t),\{x_i\})$ сходится по вариации к $\lambda(t,\xi_0(t),\{x_i\})$, а также то обстоятельство, что

$$\sum_{i>N}\lambda(1,\xi_n(t),\{x_i\})\to\sum_{i>N}\lambda(1,\xi_n(t),\{x_i\}),$$

а последнюю сумму можно сделать сколь угодно малой выбором достаточно большого N, мы легко получим (3.5). Теорема доказана.

3.2. **Следствие.** *Пусть конечномерные распределения однородных процессов $\xi_n(t)$ сходятся к конечномерным распределениям однородного процесса $\xi_0(t)$. Тогда для любого измеримого U-непрерывного функционала f распределение $f(\xi_n(t))$ сходится к распределению $f(\xi_0(t))$.*

Доказательство. При доказательстве теоремы 2.7 мы уже показали, что для каждого $\varepsilon>0$ в этом случае

$$\lim_{c\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\sup_{|t_1-t_2|\leqslant c}\mathbf{P}\{|\xi_n(t_2)-\xi_n(t_1)|>\varepsilon\}=0.$$

Остается проверить, что выполняется условие в) теоремы 3.1. Легко видеть, что в нашем случае $\lambda(\tau,\xi_n(t),A)=\tau\lambda(1,\xi_n(t),A)$, так что нужно лишь проверить, что $\lambda(1,\xi_n(t),A)\to\lambda(1,\xi_0(t),A)$, если A такое, что $\lambda(1,\xi_0(t),\overline{A}\cap\overline{X\setminus A})=0$.

С этой целью рассмотрим функционал $k_A[x(t)]$, равный количеству скачков $x(t)$, принадлежащих A. Если A лежит вне некоторой окрестности нуля, то $k_A[x(t)]$ определен для всех $x(t)$ из K, причем k_A непрерывен для тех $x(t)$, у которых нет скачков, принадлежащих $\overline{A}\cap\overline{X\setminus A}$. Значит, ввиду того, что число скачков $\xi_0(t)$, принадлежащих $\overline{A}\cap\overline{X\setminus A}$, распределено по закону Пуассона с параметром $\lambda(1,\xi_0(t),\overline{A}\cap\overline{X\setminus A})$, функционал $k_A[x(t)]$ будет почти всюду непрерывен относительно меры, соответствующей

процессу $\xi_0(t)$, если только $\lambda(1, \xi_0(t), \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}) = 0$. Поэтому на основании теоремы 3.2.3 [8] распределение $k_A[\xi_n(t)]$ сходится к распределению $k_A[\xi_0(t)]$, а значит, и $\lambda(1, \xi_n(t), A)$ сходится к $\lambda(1, \xi_0(t), A)$. Это и доказывает наше утверждение.

3.3. Замечание. Точно таким же образом, каким вы доказывали, что $\lambda(1, \xi_n(t), A) \to \lambda(1, \xi_0(t), A)$ можно показать, что, если распределения $\xi_n(t)$, где $\xi_n(t) = \sum_{i \leqslant t(n+1)} \xi_{n,1}$, а $\xi_{n,1}, \ldots, \xi_{n,n}$ при каждом n — независимые одинаково распределенные величины сходятся к распределению $\xi_0(t)$, то $n\mathbf{P}\{\xi_{n,1} \in A\} \to \lambda(1, \xi_0(t), A)$. Только в этом случае $k_A(\xi_n(t))$ будет иметь биномиальное распределение с математическим ожиданием $n\mathbf{P}\{\xi_{n,1} \in A\}$.

Изучим более подробно поведение таких процессов при $n \to \infty$.

3.4. Теорема. *Пусть даны две последовательности серий независимых в каждой серии одинаково распределенных величин* $\xi_{n,1}, \xi_{n,2}, \ldots, \xi_{n,n}$ *и* $\eta_{n,1}, \eta_{n,2}, \ldots, \eta_{n,n}$, *а процессы* $\xi_n(t)$ *и* $\eta_n(t)$ *построены по формулам*

$$\xi_n(t) = \sum_{i \leqslant t(n+1)} \xi_{n,i}, \quad \eta_n(t) = \sum_{0 \leqslant t(n+1)} \eta_{n,i}.$$

Тогда, если распределение $\xi_n(t)$ *и* $\eta_n(t)$ *сходятся к распределениям одного и того же процесса* $\xi_0(t)$, *а* f — *функционал, для которого существует непрерывная функция* $\omega(\delta)$, *такая что* $\omega(0) = 0$ *и* $|f(x(t)) - f(y(t))| < \omega(\delta)$ *при* $\sup_t |x(t) - y(t)| < \delta$, *то случайные величины* $f(\xi_n(t))$ *и* $f(\eta_n(t))$ *либо имеют одинаковые предельные распределения, либо ни для одной из них оно не существует.*

Доказательство. Достаточно показать, что справедливы для любого α и положительного h неравенства:

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \left(\mathbf{P}\{f(\eta_n(t)) < \alpha + h\} - \mathbf{P}\{f(\xi_n(t)) < \alpha\}\right) \geqslant 0, \tag{3.7}$$

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \left(\mathbf{P}\{f(\xi_n(t)) < \alpha + h\} - \mathbf{P}\{f(\eta_0(t)) < \alpha\}\right) \geqslant 0. \tag{3.8}$$

Оба эти неравенства доказываются аналогично, поэтому докажем только (3.7).

Проведем некоторые предварительные рассмотрения (они обозначены римскими цифрами). Положим, если $\lambda(1, \xi_0(t), \{-\varepsilon\}) = 0$, $\lambda(1, \xi_0(t), \{\varepsilon\}) = 0$

$$\overline{\xi}_{n,i} = \begin{cases} \xi_{n,i}, & |\xi_{n,i}| \leqslant \varepsilon \\ 0, & |\xi_{n,i}| > \varepsilon \end{cases}; \quad \underline{\xi}_{n,i} = \xi_{n,i} - \overline{\xi}_{n,i}; \quad \overline{\xi}_n(t) = \sum_{i \leqslant t(n+1)} \overline{\xi}_{n,i}; \quad \underline{\xi}_n(t) = \xi_n(t) - \overline{\xi}_n(t);$$

$$\overline{\eta}_{n,i} = \begin{cases} \eta_{n,i}, & |\eta_{n,i}| \leqslant \varepsilon \\ 0, & |\eta_{n,i}| > \varepsilon \end{cases}; \quad \underline{\eta}_{n,i} = \eta_{n,i} - \overline{\eta}_{n,i}; \quad \overline{\eta}_n(t) = \sum_{i \leqslant t(n+1)} \eta_{n,i}; \quad \underline{\eta}_n(t) = \eta_n(t) - \overline{\eta}_n(t).$$

I. Обозначим через $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$ все номера, где $\xi_{n,2} \neq 0$, а через $q_1, q_2, \ldots, q_\mu$ все номера i, где $\eta_{n,1} \neq 0$. Легко видеть, что для

$$1 \leqslant r_1 < r_2 < \ldots < r_k \leqslant n$$

$$\mathbf{P}\{p_1 = r_1, p_2 = r_2, \ldots, p_k = r_k, \nu = k\} = (\mathbf{P}\{|\xi_{n,1}| \leqslant \varepsilon\})^{n-k} (\mathbf{P}\{|\xi_{n,1}| > \varepsilon\})^k \tag{3.9}$$

$$\mathbf{P}\{q_1=r_1, q_2=r_2, \ldots, q_k=r_k, \mu=k\}=(\mathbf{P}\{|\eta_{n,1}|\leqslant\varepsilon\})^{n-k}(\mathbf{P}\{|\eta_{n,1}|>\varepsilon\})^k. \quad (3.10)$$

Так как $n\mathbf{P}\{|\xi_{n,1}|>\varepsilon\}\to\lambda(1, \xi_0(t), D_\varepsilon)$, $n\mathbf{P}\{|\eta_{n,1}|>\varepsilon\}\to\lambda(1, \xi_0(t), D_\varepsilon)$, где $D_\varepsilon=(-\infty, -\varepsilon)\cup(\varepsilon, +\infty)$, то из (3.9) и (3.10) вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sum_{1\leqslant r_1<r_2<\ldots<r_k\leqslant n}|\mathbf{P}\{p_1=r_1, \ldots, p_k=r_k, \nu=k\}-$$

$$-\mathbf{P}\{q_1=r_1, \ldots, q_k=r_k, \mu=k\}|=0. \quad (3.11)$$

II. Обозначим далее

$$\sigma_{n,1}=\xi_{n,p_1}, \ldots, \sigma_{n,\nu}=\xi_{n,p_\nu},$$

$$\rho_{n,1}=\rho_{n,q_1}, \ldots, \rho_{n,\mu}=\mu_{n,q_\mu}.$$

Величины $\sigma_{n,1}, \ldots, \sigma_{n,\nu}$ независимы между собой и одинаково распределены:

$$\mathbf{P}\{\sigma_{n,1}\in A\}=\frac{\mathbf{P}\{\xi_{n,1}\in A\setminus[-\varepsilon, \varepsilon]\}}{1-\mathbf{P}\{\xi_{n,1}\in[-\varepsilon, \varepsilon]\}}$$

величины $\rho_{n,1}, \ldots, \rho_{n,\mu}$ также независимы и одинаково распределены:

$$\mathbf{P}\{\rho_{n,1}\in A\}=\frac{\mathbf{P}\{\eta_{n,1}\in A\setminus[-\varepsilon, \varepsilon]\}}{1-\mathbf{P}\{\eta_{n,1}\in[-\varepsilon, \varepsilon]\}}.$$

На основании 3.3 заключаем, что как распределение $\sigma_{n,1}$ так и распределение $\rho_{n,1}$ сходятся к распределению:

$$\mathbf{P}_\varepsilon(A)=\frac{\lambda(1, \xi_0(t), A\setminus(-\varepsilon, \varepsilon))}{\lambda(1, \xi_0(t), X\setminus(-\varepsilon, \varepsilon))},$$

(здесь X обозначает всю вещественную прямую)

III. Положим теперь $\bar{\xi}_0(t)=\xi_0(t)-\sum_{\tau\leqslant t, |\xi_0(\tau)-\xi_0(\tau-0)|>\varepsilon}(\xi_0(t)-\xi_0(\tau-0))$,

а для всякой функции из K положим

$$\bar{x}(t)=x(t)-\sum_{\tau\leqslant t, |x(\tau)-x(\tau-0)|>\varepsilon}(x(\tau)-x(\tau-0)).$$

Если F некоторый $\mathbf{J}_1$-непрерывный функционал, то положим $\bar{F}(x(t))=F(\bar{x}(t))$. Функционал $\bar{F}$ будет непрерывен для тех $x(t)$, у которых нет скачков размера ε. Поэтому на основании 3.2.3 [8] распределение $\bar{F}(\xi_n(t))$ сходится к распределению $\bar{F}(\xi_0(t))$ и распределение $\bar{F}(\eta_n(t))$ сходится к распределению $\bar{F}(\xi_0(t))$, т. е. распределения $F(\bar{\xi}_n(t))$ и $F(\bar{\eta}_n(t))$ сходятся к распределению $F(\xi_0(t))$. Применяя теорему 3.2.2 из [8], можем заключить, что конечномерные распределения $\bar{\xi}_n(t)$ и $\bar{\eta}_n(t)$ сходятся к конечномерным распределениям $\bar{\xi}_0(t)$ и, кроме того, при любом $\delta>0$

$$\lim_{c\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\mathbf{P}\{\Delta_{\mathbf{J}_1}(c, \bar{\xi}_n(t))>\delta\}=0, \quad (3.12)$$

$$\lim_{c\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\mathbf{P}\{\Delta_{\mathbf{J}_1}(c, \bar{\eta}_n(t))>\delta\}=0. \quad (3.13)$$

Пусть $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N = 1$, а $c_N = \max(t_i - t_{i-1})$. Тогда

$$\mathbf{P}\{\max_{0\leqslant i\leqslant N-1}\sup_{t_i\leqslant t\leqslant t_{i+1}}|\overline{\xi}_n(t)-\overline{\xi}_n(t_i)|>2\varepsilon\}\leqslant\mathbf{P}\left\{\Delta_{\mathbf{J}_1}(c_N,\overline{\xi}_n(t))>\frac{\varepsilon}{2}\right\},\quad(3.14)$$

$$\mathbf{P}\{\max_{0\leqslant i\leqslant N-1}\sup_{t_i\leqslant t\leqslant t_{i+1}}|\overline{\eta}_n(t)-\overline{\eta}_n(t_i)|>2\varepsilon\}\leqslant\mathbf{P}\left\{\Delta_{\mathbf{J}_1}(c_N,\overline{\eta}_n(t))>\frac{\varepsilon}{2}\right\}.\quad(3.15)$$

IV. Введем еще процессы

$$\widetilde{\xi}_n(t)=\begin{cases}\overline{\xi}_n(t_i), & t_i\leqslant t<t_{i+1};(i=0,\ldots,N-1)\\ \xi_n(t_{N-1}), & t=1.\end{cases}$$

$$\widetilde{\eta}_n(t)=\begin{cases}\overline{\eta}_n(t_i), & t_i\leqslant t<t_{i+1};\\ \overline{\eta}_n(t_{N-1}), & t=1\end{cases};\quad\widetilde{\xi}_0(t)=\begin{cases}\overline{\xi}_0(t_i), & t_i\leqslant t<t_{i+1}\\ \xi_0(t_{N-1}), & t=1.\end{cases}$$

Ввиду (3.14) и (3.15) имеем

$$\mathbf{P}\{\sup_t|\widetilde{\xi}_n(t)-\widetilde{\xi}_n(t)|>2\varepsilon\}\leqslant\mathbf{P}\left\{\Delta_{\mathbf{J}_1}(c_N,\overline{\xi}_n(t))>\frac{\varepsilon}{2}\right\},\quad(3.16)$$

$$\mathbf{P}\{\sup_t|\widetilde{\eta}_n(t)-\overline{\eta}_n(t)|>2\varepsilon\}\leqslant\mathbf{P}\left\{\Delta_{\mathbf{J}_1}(c_N,\overline{\eta}_n(t))>\frac{\varepsilon}{2}\right\}.\quad(3.17)$$

Перейдем теперь к выводу (3.7). Из (3.16) и (3.17) следует, что

$$\mathbf{P}\{f(\xi_n(t))<\alpha\}\leqslant\mathbf{P}\{f(\widetilde{\xi}_n(t)+\overline{\overline{\xi}}_n(t))<\alpha+\omega(2\varepsilon)\}+\mathbf{P}\left\{\Delta_{\mathbf{J}_1}(c_N,\overline{\overline{\xi}}_n(t))>\frac{\varepsilon}{2}\right\},\quad(3.18)$$

$$\mathbf{P}\{f(\eta_n(t)<\alpha+h\}\leqslant\mathbf{P}\{f(\widetilde{\eta}_n(t)+\overline{\overline{\eta}}_n(t))<\alpha+h-\omega(2\varepsilon)\}-$$

$$-\mathbf{P}\left\{\Delta_{\mathbf{J}_1}(c_N,\overline{\eta}_n(t)>\frac{\varepsilon}{2}\right\}.\quad(3.19)$$

Но

$$\mathbf{P}\{f(\widetilde{\xi}_n(t)+\overline{\overline{\xi}}_n(t))<\alpha+\omega(2\varepsilon)\}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r_1<r_2<\ldots<r_k}\mathbf{P}\{f(\widetilde{\xi}_n(t)+\overline{\overline{\xi}}_n(t))<\alpha+$$

$$+\omega(2c)\,|\,p_1=r_1,\ldots,p_k=r_k,\nu=k\}\,\mathbf{P}\{p_1=r_1,\ldots,p_k=r_k,\nu=k\},\quad(3.20$$

$$\mathbf{P}\{f(\widetilde{\eta}_n(t)+\overline{\overline{\eta}}_n(t))<\alpha+h-\omega(2\varepsilon)\}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r_1<r_2<r_k}\mathbf{P}\{f(\widetilde{\eta}_n(t)+\overline{\overline{\eta}}_n(t))<\alpha+\omega(2\varepsilon)+h\,|\,q_1=r_1,\ldots,q_k=r_k\mu=k\}\times$$

$$\times\,\mathbf{P}\{q_1=r_1,\ldots,q_k=r_k,\mu=k\}.\quad(3.21$$

Условные распределения величин $\widetilde{\xi}_n(t)$ при условии $p_1=r_1,\ldots,p_k=r$ $\nu=k$ сходятся при $n\to\infty$ к распределениям $\widetilde{\xi}_0(t)$, так как распределе ние $\widetilde{\xi}_n(t)$ при условии $\nu=k$ отличается от распределения $\overline{\xi}_n(t)$ при услови $\nu=0$ тем, что в суммах, которые дают $\widetilde{\xi}_n(t)$, будет во втором случа не более чем на k слагаемых $\xi_{n,i}$ больше, но так как сами эти слагаемы бесконечно малы, то при $n\to\infty$ распределения $\widetilde{\xi}_n(t)$ при условиях $\nu=$ и $\nu=k$ в пределе совпадут; кроме того величины ν равномерно по ограничены по вероятности, так что распределение $\widetilde{\xi}_n(t)$ в пределе

зависит от ν и совпадает с распределением $\widetilde{\xi}_0(t)$. Точно так же условное распределение $\widetilde{\eta}_n(t)$ при условии $q_1 = r_1, \ldots, q_k = r_k$, $\mu = k$ сходится при $n \to \infty$ к распределению $\widetilde{\xi}_0(t)$.

Распределение величины $f(\widetilde{\xi}_n(t) + \overline{\overline{\xi}}_n(t))$ при условии $p_1 = r_1$, $p_2 = r_2, \ldots, p_k = r_k$, $\nu = k$, как и распределение величины $f(\widetilde{\eta}_n(t) + \overline{\overline{\eta}}_n(t))$ при условии $q_1 = r_1$, $q_2 = r_2, \ldots, q_k = r_k$, $\mu = k$, является распределением непрерывной функции, зависящей от $N + k$ независимых между собой величин:

$$\widetilde{\xi}_n(t_i) - \widetilde{\xi}_n(t_{i-1}),\ \sigma_{n,1}, \ldots, \sigma_{n,k} \text{ и } \widetilde{\eta}_n(t_i) - \widetilde{\eta}_n(t_{i-1}),\ \rho_{n,1}, \ldots, \rho_{n,k},$$

причем и те и другие величины имеют одинаковые предельные распределения. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} (\mathbf{P}\{f(\widetilde{\eta}_n(t) + \overline{\overline{\eta}}_n(t)) < \alpha + h - \omega(2\varepsilon) \mid q_1 = r_1, \ldots, q_k = r_k, \mu = k\} -$$

$$- \mathbf{P}\{f(\widetilde{\xi}_n(t) + \overline{\overline{\xi}}_n(t)) < \alpha + \omega(2\varepsilon) \mid p_1 = r_1, \ldots, p_k = r_k, \nu = k\}) \geqslant 0, \quad (3.22)$$

если только ε настолько мало, что $\omega(2\varepsilon) < \frac{h}{2}$. Кроме того,

$$\lim_{L\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{k>L} (\mathbf{P}\{\nu = k\} + \mathbf{P}\{\mu = k\}) = 0. \quad (3.23)$$

Из (3.23), (3.22), (3.21) и (3.11) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} (\mathbf{P}\{f(\widetilde{\eta}_n(t) + \overline{\overline{\eta}}_n(t)) < \alpha + h - \omega(2\varepsilon)\} -$$

$$- \mathbf{P}\{f(\widetilde{\xi}_n(t) + \overline{\overline{\xi}}_n(t)) < \alpha + \omega(2\varepsilon)\}) \geqslant 0, \quad (3.24)$$

или, принимая во внимание (3.18) и (3.19),

$$\lim_{n\to\infty} (\mathbf{P}\{f(\eta_n(t)) < \alpha + h\} - \mathbf{P}\{(\xi_n(t)) < \alpha\}) \geqslant$$

$$\geqslant -\left[\overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\mathbf{P}\left\{\Delta_{\mathbf{J}_1}(c_N \overline{\xi}_n(t)) > \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) + \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\Delta_{\mathbf{J}_1}(c_N \overline{\eta}_n(t)) > \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right]. \quad (3.25)$$

Переходя в (3.25) к пределу при $c_N \to 0$ и получим (3.7). Теорема доказана.

3.5. Замечание. Доказав неравенства (3.7) и (3.8), мы доказали на самом деле большее, именно, что распределения $f(\xi_n(t))$ и $f(\eta_n(t))$ при $n \to \infty$ имеют одно и то же асимптотическое поведение: если δ_n обозначает расстояние между распределениями $f(\xi_n(t))$ и $f(\eta_n(t))$ в смысле метрики Леви, то $\delta_n \to 0$.

Используя условия сходимости распределений сумм независимых случайных величин, приведенных в [12], § 25, можно вывести из 3.4 следующую теорему.

3.6. **Теорема.** *Если* $\xi_{n,1}, \xi_{n,2}, \ldots, \xi_{n,n}$ и $\eta_{n,1}, \eta_{n,2}, \ldots, \eta_{n,n}$ — *две последовательности серий одинаково распределенных и независимых в каждой серии случайных величин и выполняются условия*:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\mathbf{P}\{\xi_{n,1} > x\} - \mathbf{P}\{\eta_{n,1} > x\}) = 0$ для $x > 0$,

$\lim\limits_{n\to\infty} n(\mathbf{P}\{\xi_{n,1} < x\} - \mathbf{P}\{\eta_{n,1} < x\}) = 0$ для $x < 0$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty} n \int\limits_{|x|<1} x\,(\mathbf{P}\{\xi_{n,1}\in dx\} - \mathbf{P}\{\eta_{n,1}\in dx\}) = 0,$

в) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\Big[n\Big(\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x^2\,(\mathbf{P}\{\xi_{n,1}\in dx\} - \mathbf{P}\{\eta_{n,1}\in dx\}\Big) -$

$$-\Big(\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x\mathbf{P}\{\xi_{n,1}\in dx\}\Big)^2 + \Big(\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x\mathbf{P}\{\eta_{n,1}\in dx\}\Big)^2\Big] = 0,$$

г) *существуют такие* $G(x)<\infty$ *и* c, *что*

$$n\mathbf{P}\{|\xi_{n,1}|>x\}<G(x),\ n\int\limits_{-1}^{1} x^2\mathbf{P}\{\xi_{n,1}\in dx\}<c,$$

то для любого функционала f, *для которого существует непрерывная функция* $\omega(\delta)$, *такая, что* $\omega(0)=0$ *и*

$$|f(x(t)) - f(y(t))| \leqslant \omega(\sup_t |x(t)-y(t)|)$$

будет

$$\lim_{n\to\infty}(\mathbf{P}\{f(\xi_n(t))<\alpha+h\} - \mathbf{P}\{f(\eta_n(t)<\alpha\}\geqslant 0, \tag{3.26}$$

$$\lim_{n\to\infty}(\mathbf{P}\{f(\eta_n(t))<\alpha+h\} - \mathbf{P}\{f(\xi_n(t))<\alpha\})\geqslant 0, \tag{3.27}$$

для любых α *и положительных* h, *т. е. распределения* $f(\xi_n(t))$ *и* $f(\eta_n(t))$ *имеют при* $n\to\infty$ *одинаковое асимптотическое поведение в том же смысле, что и в* 3.5.

§ 4. Предельные теоремы для функционалов, непрерывных в других топологиях

До сих пор мы в основном (кроме теоремы 2.1) занимались сходимостью к стохастически непрерывным процессам и рассматривали только $\mathbf{J}_1$ и U-непрерывные функционалы. Оказывается, что здесь и не могут понадобиться функционалы, непрерывные в других топологиях, определенных в [8]. В этом нас убеждает

4.1. **Теорема.** *Пусть* $\xi_0(t)$ *стохастически непрерывный процесс, а* $\xi_n(t)$ *— последовательность процессов, конечномерные распределения которых сходятся к конечномерным распределениям процесса* $\xi_0(t)$, *и пусть распределение* $\sup\limits_{t_1\leqslant t\leqslant\tau\leqslant t_2} |\xi_n(\tau)-\xi_n(t)|$ *сходится к распределению* $\sup\limits_{t_1\leqslant t\leqslant\tau\leqslant t_2} |\xi_0(\tau)-\xi_0(t)|$ *для любых* $0\leqslant t_1<t_2\leqslant 1$. *Тогда для всякого* $\mathbf{J}_1$*-непрерывного функционала* f *распределение* $f(\xi_n(t))$ *сходится к распределению* $f(\xi_0(t))$.

Доказательство. На основании теоремы 2.6 существуют такие функции $x_n(t)$, что для любого $\mathbf{J}_1$-непрерывного функционала f распределение $f(\xi_n(t)-x_n(t))$ сходится к распределению $f(\xi_0(t))$. Значит на основании теоремы 3.2.3 [8] распределение $f(\xi_n(t)-x_n(t))$ сходится к распределению $f(\xi_0(t))$ и для любого функционала f, непрерывного почти всюду по мере, соответствующей процессу $\xi_0(t)$. В частности, для любых $t_1<t_2$ распре-

деление $\sup_{t_1 \leqslant t < \tau \leqslant t_2} |(\xi_n(\tau) - \overline{x_n}(\tau)) - (\xi_n(t) - \overline{x_n}(t))|$ сходится к распределению $\sup_{t_1 \leqslant t < \tau \leqslant t_2} |\xi_0(t) - \xi_0(\tau)|$.

Покажем, что тогда

$$\lim_{h \to 0} \overline{\lim_{n \to \infty}} \sup_{|t_1 - t_2| \leqslant h} |x_n(t_1) - x_n(t_2)| = 0. \tag{4.1}$$

Если бы (4.1) не выполнялось, то существовали бы подпоследовательность n_k, t^* и η такие, что для любого $\delta > 0$

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{|t_1 - t^*| < \delta,\ |t_2 - t^*| < \delta} |x_{n_k}(t_1) - x_{n_k}(t_2)| > \eta. \tag{4.2}$$

Из стохастической непрерывности $\xi_0(t)$ и 1.4 следует, что можно выбрать такое δ, чтобы

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t^* - \delta \leqslant t < \tau < t^* + \delta} |\xi_0(t) - \xi_0(t)| > \frac{\eta}{4}\right\} < \frac{1}{3}. \tag{4.3}$$

Тогда

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \mathbf{P}\left\{\sup_{t^* - \delta \leqslant t < \tau < t^* + \delta} |\xi_n(t) - \xi_n(\tau)| > \frac{\eta}{2}\right\} < \frac{1}{3} \tag{4.4}$$

и

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \mathbf{P}\left\{\sup_{t^* - \delta \leqslant t < \tau < t^* + \delta} |\xi_n(t) - \overline{x}_n(t) - \xi_n(\tau) + \overline{x}_n(\tau)| > \frac{\eta}{2}\right\} < \frac{1}{3}. \tag{4.5}$$

Но ввиду (4.2), неравенства (4.4) и (4.5) несовместимы. Из 2.2 следует, что для каждого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{h \to 0} \overline{\lim_{n \to \infty}} \sup_{|t_1 - t_2| \leqslant h} \mathbf{P}\{|\xi_n(t_1) - x_n(t_1) + x_n(t_2) - \xi_n(t_2)| > \varepsilon\} = 0, \tag{4.6}$$

а из (4.6) и (4.1) немедленно следует, что для всякого

$$\lim_{h \to 0} \overline{\lim_{n \to \infty}} \sup_{|t_1 - t_2| \leqslant h} \mathbf{P}\{|\xi_n(t_2) - \xi_n(t_1)| > \varepsilon\} = 0. \tag{4.7}$$

Для доказательства осталось применить теорему 2.2.

4.2. **Следствие.** *Пусть $\xi_0(t)$ — стохастически непрерывный процесс, а $\xi_n(t)$ — последовательность процессов, такая, что для любого S-непрерывного функционала, где S обозначает одну из топологий $\mathbf{J}_2$, M_1, M_2 (см. [8]), распределение $f(\xi_n(t))$ сходится к распределению $f(\xi_0(t))$. Тогда для любого $\mathbf{J}_1$-непрерывного функционала F распределение $F(\xi_n(t))$ сходится к распределению $F(\xi_0(t))$.*

Для доказательства этого утверждения достаточно заметить, что $\sup_{t_1 \leqslant t < \tau \leqslant t_2} |x(\tau) - x(t)|$ является почти всюду непрерывным в топологиях $\mathbf{J}_2$, M_1, M_2 относительно меры, соответствующей $\xi_0(t)$, а затем применить теоремы 3.2.2, 3.2.3 из [8] и 4.1.

Таким образом, классы функционалов, непрерывных в топологиях $\mathbf{J}_2$, M_1, M_2, могут представлять интерес лишь в том случае, когда $\xi_0(t)$ имеет стохастические разрывы.

4.3. **Теорема.** *Распределение $f(\xi_n(t))$ сходится к распределению $f(\xi_0(t))$ для любого M_1-непрерывного функционала f тогда и только тогда, когда,* а) *конечномерные распределения $\xi_n(t)$ сходятся к конечномерным распреде-*

лениям $\xi_0(t)$ *для всюду плотного множества значений* t, *включающего* 0 *и* 1; б) *для всякого* $\varepsilon > 0$

$$\lim_{c \to 0} \overline{\lim_{n \to \infty}} \sup_{t-c \leqslant t_1 < t \leqslant t_2 \leqslant t+c} \mathbf{P}\{|\xi_n(t) - \xi_n(t_1)| + |\xi_n(t_2) - \xi_n(t)| - |\xi_n(t_2) - \xi_n(t_1)| > \varepsilon\} = 0. \tag{4.8}$$

Прежде чем доказать теорему, докажем следующую лемму:

4.4. **Лемма.** *Пусть* $\xi_{n,1}, \ldots, \xi_{n,n}$ — *последовательность серий независимых в каждой серии величин, причем для* $\xi_{n,1} + \xi_{n,2} + \ldots + \xi_{n,n}$ *существует предельное распределение и для каждого* $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{i \leqslant k} \mathbf{P}\{\xi_{n,i} + \ldots + \xi_{n,k} < -\varepsilon\} = 0. \tag{4.9}$$

Тогда для каждого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}\{\inf_{i \leqslant k} (\xi_{n,i} + \ldots + \xi_{n,k}) < -\varepsilon\} = 0. \tag{4.10}$$

Доказательство. Положим $\sum_{j=1}^{k} \xi_{n,j} = S_{n,k}$. Свяжем с последовательностью величин $S_{n,k}$ случайный процесс, построенный следующим образом:

Пусть ε_m и η_m — две последовательности положительных чисел, монотонно стремящиеся к нулю при $m \to \infty$, и пусть числа $0 < k_{m,1}^{(n)} < k_{m,2}^{(n)} < \ldots < k_{m,r_m^{(n)}}^{(n)} \leqslant n$ таковы, что

$$\mathbf{P}\{|S_{n,i}| > \varepsilon_m\} < \eta_m, \quad i < k_{m,1}^{(n)}, \quad \mathbf{P}\{|S_{n,\, k_{m,1}^{(m)}}| \geqslant \varepsilon_m\} \geqslant \eta_m;$$

$$\mathbf{P}\{|S_{n,i} - S_{n,\, k_{m,j}^{(n)}}| > \varepsilon_m\} < \eta_m, \quad k_{m,j}^{(n)} < i < k_{m,j+1}^{(n)},$$

$$\mathbf{P}\{|S_{n,\, k_{m,j+1}^{(n)}} - S_{n,\, k_{m,j}^{(n)}}| \geqslant \varepsilon_m\} \geqslant \eta_{(m)}$$

$$\mathbf{P}\{|S_{n,i} - S_{n,\, k_{m,r_m^{(n)}}^{(n)}}| > \varepsilon_m\} < \eta_m, \quad k_{m,r_m^{(n)}}^{(n)} < i \leqslant n.$$

Для каждого m существует такое r_m, что $r_m^{(n)} \leqslant r_m$. Если бы это было не так, то для каждого N нашлась бы последовательность n' такая, что $r_m^{(n')} > N$ и тогда

$$S_{n',n'} = S_{n',\, k_{m,1}^{(n')}} + \sum_{1}^{N-1} (S_{n',\, k_{m,j+1}^{(n')}} - S_{n',\, k_{m,j}^{(n')}}) + S_{n',n'} - S_{n',\, k_{m,N}^{(n')}}.$$

Из (4.9) следует, что $\mathbf{P}\{S_{n',n'} - S_{n',\, k_{m,N}^{(n')}} < -\delta\} \to 0$ для любого $\delta > 0$ и

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}\{S_{n',\, k_{m,j+1}^{(n')}} - S_{n',\, k_{m,j}^{(n')}} < -\delta\} = 0,$$

а значит

$$\lim_{n' \to \infty} \mathbf{P}\{S_{n',\, k_{m,j+1}^{(n')}} - S_{n',\, k_{m,j}^{(n')}} \geqslant \varepsilon_m\} \geqslant \eta_m.$$

Поэтому

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}\{S_{n',n'} > k\varepsilon_m\} \geqslant \sum_{s=k+1}^{n} C_N^s \eta_m^s (1 - \eta_m)^{N-s}, \tag{4.11}$$

это противоречит тому, что $S_{n,n}$ имеет предельное распределение, так как, каково бы ни было k, можно взять настолько большое N, чтобы

$$\sum_{s=k+1}^{N} C_N^s \eta_m^s (1-\eta_m)^{N-s} \geqslant \frac{1}{2}.$$

Положим теперь

$$\eta_n(0)=0; \quad \eta_n\left(\frac{l}{r_1^{(n)}+1}\right) = S_{n,\, k_{1,\,l}^{(n)}};\ l=1,\ldots r_1^{(n)}.$$

Далее, если $\eta_n(t_1) = S_{n,\, k_{m,\,l}^{(n)}}$ и $\eta_n(t_2) = S_{n,\, k_{m,\,l+1}^{(n)}}$ уже определены, а $k_{m+1,\,j}^{(n)} \leqslant k_{m,\,l}^{(n)} < k_{m+1,\,j+1}^{(n)} < \ldots < k_{m+1,\,j+k}^{(n)} < k_{m,\,l+1}^{(n)} \leqslant k_{m,\,j+k+1}^{(n)}$. Положим

$$\eta_n\left(t_1 + \frac{t_2-t_1}{k+1}\,p\right) = S_{n,\, k_{m+1,\,j+p}^{(n)}};\ p=1,2,\ldots,k.$$

После того как мы проделаем такую операцию последовательно для всех m, найдем l_n+1 точек, где $\eta_n(t)$ будет определено [l_n обозначет число тех i, для которых $\mathbf{P}\{\xi_{n,\,i}=0\}<1$]. Пусть это будут точки $0=t_0<t_1<\ldots$ $\ldots<t_{l_n}<1$. Для остальных t определим $\eta_n(t)=\eta_n(t_k)$, если $t_k<t<t_{k+1}$ и $\eta_n(t)=S_{n,n}$ для $t=1$.

Из построения следует, что

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,\Delta_{J_1}^P(c_m,\eta_n(t),2\varepsilon_m)\leqslant 2\eta_m$, если $c_m = \dfrac{1}{(r_1+1)\ldots(r_m+1)}$, так что для всякого $\varepsilon>0$

$$\lim_{c\to 0}\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\ \Delta_{J_1}^P(c,\ \eta_n(t),\ \varepsilon)=0. \tag{4.12}$$

Легко также установить, что для всякого $\varepsilon>0$

$$\lim_{c\to 0}\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\ \sup_{0<t\leqslant c}\ \mathbf{P}\{|\eta_n(t)-\eta_n(0)|\}=0, \tag{4.13}$$

$$\lim_{c\to 0}\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\ \sup_{1-c<t<1}\ \mathbf{P}\{|\eta_n(1)-\eta_n(t)|>\varepsilon\}=0. \tag{4.14}$$

Предположим теперь, что (4.10) не выполнено. Тогда существует последовательность n_j и $\Delta>0$, такие, что

$$\mathbf{P}\{\inf_{i\leqslant k}(\xi_{n_j,\,i}+\xi_{n_j,\,i+1}+\ldots+\xi_{n_j,\,k})\leqslant -\varepsilon\}>\Delta. \tag{4.15}$$

Выберем теперь подпоследовательность n_j' из последовательности n_j так, чтобы для всех рациональных t_1 и t_i распределение $\eta_{n_j'}(t_2)-\eta_{n_j'}(t_1)$ сходилось к некоторому предельному распределению. Легко убедиться, что предельное распределение для $\eta_{n_j'}(t_2)-\eta_{n_j'}(t_1)$ будет совпадать с распределением $\eta_0(t_2)-\eta_0(t_1)$, где $\eta_0(t)$ — некоторый процесс с независимыми приращениями, причем из (4.12), (4.13) и (4.14) можно вывести, что этот процесс можно выбрать так, чтобы его траектории с вероятностью 1 принадлежали K, и тогда они будут с вероятностью 1 монотонны, ввиду (4.9). Таким образом, для последовательности процессов $\eta_{n_j'}(t)$ выполнены условия теоремы 2.1, если взять вместо $\xi_0(t)$, $\eta_0(t)$. Рассмот-

рим $\mathbf{J}_1$-непрерывный функционал F:

$$F(x(t)) = \inf_{0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant 1} (x(t_2) - x(t_1)).$$

Из того, что $\eta_0(t)$ с вероятностью 1 есть монотонно возрастающий процесс, следует, что $\mathbf{P}\{F(\eta_0(t)) < \varepsilon\} = 0$. Поэтому

$$\mathbf{P}\{F\eta_{n'_j}(t) < -\varepsilon\} = \mathbf{P}\{\inf_{i \leqslant k} (\xi_{n'_j,\, i} + \ldots + \xi_{n'_j,\, k}) < -\varepsilon\} \to 0,$$

что противоречит (4.15). Лемма доказана.

4.5. Следствие. *Пусть* $\xi_n(t)$ — *такая последовательность процессов, что* $\xi_n(1) - \xi_n(0)$ *имеет предельное распределение и*

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{t' < t''} \mathbf{P}\{\xi_n(t'') - \xi_n(t') < -\varepsilon\} = 0.$$

Тогда

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}\{\inf_{t' < t''} (\xi_n(t'') - \xi_n(t')) < -\varepsilon\} = 0.$$

Доказательство теоремы 4.3. Необходимость условия а) следует из 3.2.2 [8]. Необходимость условия б) следует из неравенства:

$$\sup_{t-c \leqslant t_1 < t < t_2 \leqslant t+c} \mathbf{P}\{|\xi_n(t) - \xi_n(t_1)| + |\xi_n(t_2) - \xi_n(t)| - |\xi_n(t_2) - \xi_n(t_1)| > \varepsilon\} \leqslant$$
$$\leqslant \mathbf{P}\{\sup_{t-c \leqslant t_1 < t < t_2 \leqslant t+c} (|\xi(t) - \xi_n(t_1)| + |\xi_n(t_2) - \xi_n(t)| - |\xi_n(t_2) - \xi_n(t_1)|) > \varepsilon\}.$$

и 3.2.2 [8], так как $H(x_1, x_2, x_3)$ в этом случае определяется по формуле:

$$H(x_1, x_2, x_3) = |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| - |x_1 - x_3|.$$

Достаточность условий теоремы будет показана, если будет установлено, что для всякого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{c \to 0} \overline{\lim_{n \to \infty}} \mathbf{P}\{\sup_{t-c \leqslant t_1 < t < t_2 \leqslant t+c} (|\xi_n(t) - \xi_n(t_1)| + |\xi_n(t_2) - \xi_n(t)| -$$
$$- |\xi_n(t_2) - \xi_n(t_1)|) > \varepsilon\} = 0 \tag{4.16}$$

см. 3.2.1 [8]). Предположим противное: существуют последовательности $n_k \to \infty$, $c_k \to 0$, $\varepsilon > 0$ и $\Delta > 0$ такие, что

$$\mathbf{P}\{\sup_{t-c_k \leqslant t_1 < t < t_2 \leqslant t+c_k} |\xi_n(t) - \xi_n(t_1)| + |\xi_{n_k}(t_2) - \xi_{n_k}(t)| -$$
$$- |\xi_{n_k}(t_2) - \xi_{n_k}(t_1)|) > \varepsilon\} > \Delta. \tag{4.17}$$

Не ограничивая общности, можно предполагать, что конечномерные распределения $\xi_n(t)$ сходятся к конечномерным распределениям $\xi_0(t)$ для всех рациональных t и все рациональные t являются точками стохастической непрерывности $\xi_0(t)$. Тогда существует для каждого N, ε_1 и η такое $\overline{n_0}$, что для $n > \overline{n_0}$

$$\mathbf{P}\left\{\left|\xi_n\left(\frac{k_1}{N}\right) - \xi_n\left(\frac{k_2}{N}\right)\right| > x\right\} \leqslant \mathbf{P}\left\{\left|\xi_0\left(\frac{k_1}{N}\right) - \xi_0\left(\frac{k_2}{N}\right)\right| > x - \varepsilon_1\right\} + \eta. \tag{4.18}$$

Пусть $t_1^*, t_2^*, \ldots, t_l^*$ все точки стохастического разрыва $\xi_0(t)$, где $\mathbf{P}\{|\xi_0(t_i^*) - \xi_0(t_i^* - 0)| > \varepsilon_1\} < \frac{1}{4}$, а N^* такое, что $\mathbf{P}\{|\xi_0(t') - \xi_0(t'')| > 2\varepsilon_1\} \leqslant \frac{1}{4}$,

если между t' и t'' нет точек t_i^*, а $|t''-t'|\leqslant\frac{2}{N^*}$, и, кроме того,

$$\sup_{t-\frac{2}{N^*}\leqslant t'<t<t''\leqslant\frac{2}{N^*}+t}\mathbf{P}\{|\xi_n(t)-\xi_n(t')|+|\xi_n(t'')-\xi_n(t)|-$$
$$-|\xi_n(t'')-\xi_n(t')|>\varepsilon_1\}\leqslant\frac{1}{36}. \tag{4.19}$$

Выберем n_0^* настолько большим, чтобы для $n>n_0^*$ (4.18) выполнялось при $\eta=\frac{1}{36}$. Тогда, если между $\frac{k_1}{N}$ и $\frac{k_2}{N}$ нет точек t_i^* и $\left|\frac{k_2-k_1}{N}\right|\leqslant\frac{2}{N^*}$,

$$\mathbf{P}\left\{\left|\xi_n\left(\frac{k_1}{N}\right)-\xi_n\left(\frac{k_2}{N}\right)\right|>3\varepsilon_1\right\}\leqslant\frac{1}{4}+\frac{1}{36}.$$

Значит, если между t_1 и t_2 нет точек t_i^* и $|t_2-t_1|<\frac{1}{N^*}$, то

$$\mathbf{P}\{|\xi_n(t_2)-\xi_n(t_1)|>5\varepsilon_1\}<\frac{1}{4}+\frac{1}{36}+\sup_{t-\frac{2}{N^*}\leqslant t'<t<t''\leqslant t+\frac{2}{N^*}}\mathbf{P}\{|\xi_n(t)-\xi_n(t')|+$$
$$+|\xi_n(t'')-\xi_n(t)|-|\xi_n(t'')-\xi_n(t')|>\varepsilon_1\}\leqslant\frac{1}{4}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}<\frac{1}{3}. \tag{4.20}$$

Обозначим через $\bar{t}_1,\ \bar{t}_2,\ \ldots,\ \bar{t}_r$ те точки стохастического разрыва $\xi_0(t)$, где $\mathbf{P}\{|\xi_0(\bar{t}_i)-\xi_0(\bar{t}_i-0)|>\varepsilon_1\}\geqslant\gamma$. Будем считать, что $\bar{N}$ настолько велико, что

$$\bar{t}_i-\bar{t}_{i-1}>\frac{4}{\bar{N}},\ \mathbf{P}\{|\xi_0(t')-\xi_0(t'')|>2\varepsilon_1\}\leqslant 2\gamma,$$

если между t' и t'' нет точек $\bar{t}_i$ и $|t'-t''|\leqslant\frac{2}{\bar{N}}$, а также

$$\sup_{t-\frac{2}{\bar{N}}\leqslant t'<t<t''\leqslant t+\frac{2}{\bar{N}}}\mathbf{P}\{|\xi_n(t')-\xi_n(t)|+|\xi_n(t'')-\xi_n(t)|-$$
$$-|\xi_n(t')-\xi_n(t'')|>\varepsilon_1\}\leqslant\gamma. \tag{4.21}$$

Пусть для $n>\bar{n}_0$ (4.18) выполняется при $\gamma_1=\gamma$. Тогда, если между $\frac{k_1}{N}$ и $\frac{k_2}{N}$ нет точек $\bar{t}_i$ и

$$\frac{|k_2-k_1|}{N}<\frac{2}{\bar{N}},\ \text{то}\ \mathbf{P}\left\{\left|\xi_n\left(\frac{k_1}{N}\right)-\xi_n\left(\frac{k_2}{N}\right)\right|>3\varepsilon_1\right\}\leqslant 3\gamma.$$

Поэтому, ввиду (4.21), если между t_1 и t_2 нет точек

$$\bar{t}_i\ \text{и}\ |t_2-t_1|<\frac{1}{\bar{N}},\ \text{то}\ \mathbf{P}\{|\xi_n(t_1)-\xi_n(t_2)|>5\varepsilon_1\}\leqslant 4\gamma. \tag{4.22}$$

Обозначим через $\bar{\xi}_n^{(N)}(t)$ процесс, построенный следующим образом:

$$\bar{\xi}_n^{(N)}(t)=\begin{cases}\xi_n(t),\ t\in[0,1]\setminus\bigcup\limits_{i=1}^{r}\left(\bar{t}_i-\frac{2}{N},\ \bar{t}_i+\frac{2}{N}\right);\\ \xi_n\left(\bar{t}_i+\frac{2}{N}\right),\ t\in\left(\bar{t}_i-\frac{2}{N},\ \bar{t}_i+\frac{2}{N}\right);\ i=1,2,\ldots,r.\end{cases} \tag{4.23}$$

Для $n > \max(\bar{n}_0, n_0^*)$ будет

$$\Delta_{J_1}^P\left(\frac{1}{N^*} - \frac{4}{N},\ \bar{\xi}_n^{(N)}(t),\ 5\varepsilon_1\right) \leqslant \frac{1}{3},\ \text{а}\ \Delta_{J_1}^P\left(\frac{1}{\widetilde{N}} - \frac{4}{N},\ \bar{\xi}_n^{(N)}(t),\ 5\varepsilon_1\right) \leqslant 4\gamma.$$

Поэтому, если $N > 8\widetilde{N}$ и $N > 8N^*$, получаем на основании 1.8:

$$\mathbf{P}\left\{\Delta_{J_1}\left(\frac{1}{2\widetilde{N}},\ \bar{\xi}_n^{(N)}(t)\right) > 100\varepsilon_1\right\} \leqslant 12\,\frac{4\gamma}{(1-12\gamma)^2}\,(4N^*+1)(\log 2 + 1). \tag{4.24}$$

Поскольку N^* не зависит от выбора γ, можно подобрать γ таким, чтобы правая часть (4.24) была меньше $\frac{\Delta}{2}$. Беря $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{100}$, получим

$$\mathbf{P}\left\{\Delta_{J_1}\left(\frac{1}{\widetilde{N}},\ \bar{\xi}_n^{(N)}(t)\right) > \varepsilon\right\} = \frac{\Delta}{2}.$$

Следовательно

$$\mathbf{P}\{\sup_{t_1<t_2<t_3<t_1+\frac{1}{2\widetilde{N}}} (|\xi_n(t_2) - \xi_n(t_1)| + |\xi_n(t_3) - \xi_n(t_2)| -$$

$$t_1, t_2, t_3 \in [0,1] \setminus \bigcup_{i=1}^{r} \bar{t}_i - \frac{2}{N}, \bar{t}_i + \frac{2}{N}$$

$$- |\xi_n(t_3) - \xi_n(t_1)|) > \varepsilon\} \leqslant P\left\{\Delta_{J_1}\left(\frac{1}{2\widetilde{N}},\ \bar{\xi}_n^{(N)}(t)\right) > \varepsilon\right\} \leqslant \frac{\Delta}{2}.$$

Поэтому для $n_k \geqslant \max(n_0^*, \bar{n}_0)$, $\widetilde{N} < \frac{1}{8c_k}$, ввиду (4.17)

$$\mathbf{P}\{\sup_{\substack{t_1,t_2,t_3 \in \left[\bar{t}_i - \frac{4}{\widetilde{N}},\ \bar{t}_i - \frac{4}{\widetilde{N}}\right] \\ t_1<t_2<t_3;\ i=1,2,\ldots,r}} (|\xi_{n_k}(t_2) - \xi_{n_k}(t_1)| + |\xi_{n_k}(t_3) - \xi_{n_k}(t_2)| - |\xi_{n_k}(t_3) -$$

$$- \xi_{n_k}(t_1)|) > \varepsilon\} \geqslant \frac{\Delta}{2},$$

т. е. существует хотя бы одно j такое, что для бесконечного числа N_s и n_{k_s}

$$\mathbf{P}\{\sup_{\substack{t_1,t_2,t_3 \in \left[\bar{t}_i - \frac{4}{N_s},\ \bar{t}_j + \frac{4}{N_s}\right] \\ t_1<t_2<t_3}} (|\xi_{n_{k_s}}(t_2) - \xi_{n_{k_s}}(t_1)| + |\xi_{n_{k_s}}(t_3) - \xi_{n_{k_s}}(t)_2| +$$

$$+ |\xi_{n_{k_s}}(t_3) - \xi_{n_{k_s}}(t_1)|) > \varepsilon\} \geqslant \frac{\Delta}{2r}, \tag{4.25}$$

причем N_s таковы, что распределение $\xi_{n_{k_s}}\left(\bar{t}_j + \frac{4}{N_s}\right) - \xi_{n_{k_s}}\left(\bar{t}_j - \frac{4}{N_s}\right)$ сходится к распределению

$$\xi_0(t_j) - \xi_0(t_j - 0).$$

Пусть

$$\widetilde{\xi}^{(s)}(t) = \begin{cases} \xi_{n_{k_s}}\left(\bar{t}_j - \frac{4}{N_s}\right) & , \quad t < \bar{t}_j - \frac{4}{N_s}, \\ \xi_{n_{k_s}}(t) & , \bar{t}_j - \frac{4}{N_s} \leqslant t < \bar{t}_j + \frac{4}{N_s}, \\ \xi_{n_{k_s}}\left(\bar{t}_j + \frac{4}{N_s} - 0\right), & t \leqslant \bar{t}_j + \frac{4}{N_s}. \end{cases}$$

Существуют такие $\alpha > 0$ и $\varepsilon_2 < \frac{\varepsilon}{100}$, что

$$\lim_{s\to\infty} \Delta^{P}_{J_1}\left(\frac{8}{N_s},\ \widetilde{\xi}^{(s)}(t),\ \varepsilon_2\right) > \alpha, \tag{4.26}$$

так как в противном случае на основании 1.8 мы бы заключили, что $\mathbf{P}\left\{\Delta_{J_1}\left(\frac{8}{N_s},\ \widetilde{\xi}^{(s)}(t)\right) > 100\,\varepsilon_2\right\} \to 0$, а это невозможно ввиду (4.25).

Покажем, что $\xi_0(\bar{t}_j) - \xi_0(\bar{t}_j - 0)$ принимает значения только одного знака. Если бы это было не так, то существовали бы такие h и μ, а значит при достаточно больших s

$$\mathbf{P}\left\{\xi_{n_{k_s}}\left(\bar{t}_j + \frac{4}{N_s} - 0\right) - \xi_{n_{k_s}}\left(\bar{t}_j - \frac{4}{N_s}\right) < -\frac{h}{2}\right\} > \frac{\mu}{2}, \tag{4.27}$$

$$\mathbf{P}\left\{\xi_{n_{k_s}}\left(\bar{t}_j + \frac{4}{N_s} - 0\right) - \xi_{n_{k_s}}\left(\bar{t}_j - \frac{4}{N_s}\right) > \frac{h}{2}\right\} > \frac{\mu}{2}. \tag{4.28}$$

Но из (4.26) и условия б) следует, что существуют достаточно большие s, для которых можно указать такие $\widetilde{t}_s$ и $\varepsilon_2 < \frac{\varepsilon}{100}$, что

$$\mathbf{P}\left\{\left|\xi_{n_{k_s}}(\widetilde{t}_s) - \xi_{n_{k_s}}\left(\bar{t}_j - \frac{4}{N_s}\right)\right| > \varepsilon_2\right\} \geqslant \frac{\alpha}{2}, \tag{4.29}$$

$$\mathbf{P}\left\{\left|\xi_{n_{k_s}}\left(\bar{t}_j + \frac{4}{N_s} - 0\right) - \xi_{n_{k_s}}(\widetilde{t}_s)\right| > \varepsilon_2\right\} \geqslant \frac{\alpha}{2}. \tag{4.30}$$

Из (4.27) и (4.28) вытекает, что из четырех неравенств

$$\mathbf{P}\left\{\xi_{n_{k_s}}(\widetilde{t}_s) - \xi_{n_{k_s}}\left(\bar{t}_j - \frac{4}{N_s}\right) < -\frac{h}{4}\right\} \geqslant \frac{\mu}{4}, \tag{4.31}$$

$$\mathbf{P}\left\{\xi_{n_{k_s}}(\widetilde{t}_s) - \xi_{n_{k_s}}\left(\bar{t}_j - \frac{4}{N_s}\right) > \frac{h}{4}\right\} \geqslant \frac{\mu}{4}, \tag{4.32}$$

$$\mathbf{P}\left\{\xi_{n_{k_s}}\left(\bar{t}_j + \frac{4}{N_s} - 0\right) - \xi_{n_{k_s}}(\widetilde{t}_s) < -\frac{h}{4}\right\} \geqslant \frac{\mu}{4}, \tag{4.33}$$

$$\mathbf{P}\left\{\xi_{n_{k_s}}\left(\bar{t}_j + \frac{4}{N_s} - 0\right) - \xi_{n_{k_s}}(\widetilde{t}_s) > \frac{h}{4}\right\} \geqslant \frac{\mu}{4}. \tag{4.34}$$

справедливы либо (4.31) и (4.34), либо (4.32) и (4.33), либо (4.31) и (4.32), либо (4.33) и (4.34). В первом и втором случаях

$$\mathbf{P}\left\{\left|\xi_{n_{k_s}}(\widetilde{t}_s) - \xi_{n_{k_s}}\left(\bar{t}_j - \frac{4}{N_s}\right)\right| + \left|\xi_{n_{k_s}}\left(\bar{t}_j + \frac{4}{N_s} - 0\right) - \xi_{n_{k_s}}(\widetilde{t}_s)\right| - \right.$$

$$\left. - \left|\xi_{n_{k_s}}\left(\bar{t}_j + \frac{4}{N_s} - 0\right) - \xi_{n_{k_s}}\left(\bar{t}_j - \frac{4}{N_s}\right)\right| > \frac{h}{4}\right\} \geqslant \frac{\mu^2}{16}, \tag{4.35}$$

а в третьем и четвертом случаях

$$\mathbf{P}\left\{\left|\xi_{n_{k_s}}(\widetilde{t}_s) - \xi_{n_{k_s}}\left(\bar{t}_j - \frac{4}{N_s}\right)\right| + \left|\xi_{n_{k_s}}\left(\bar{t}_j + \frac{4}{N_s} - 0\right) - \xi_{n_{k_s}}(\widetilde{t}_s)\right| - \right.$$

$$\left. - \left|\xi_{n_{k_s}}\left(\bar{t}_j - \frac{4}{N_s} - 0\right) - \xi_{n_{k_s}}\left(\bar{t}_j - \frac{4}{N_s}\right)\right| > \min\left(\varepsilon_2,\ \frac{h}{4}\right)\right\} \geqslant \frac{\alpha\mu}{8}. \tag{4.36}$$

Но как (4.35), так и (4.36) противоречат условию б) теоремы. Следовательно $\xi_0(t_j) - \xi_0(t_j - 0)$ принимает значения только одного знака; не ограничивая общности, можно считать, что $\xi_0(t_j) - \xi_0(t_j - 0)$ с вероятностью 1 положительна. Поэтому для процессов $\xi^{(s)}(t)$ выполнены условия 4.5, так как для $t'' > t'$

$$\mathbf{P}\{\xi^{(s)}(t'') - \xi^{(s)}(t') < -3\delta\} \leqslant \mathbf{P}\{\xi^{(s)}(1) - \xi^{(s)}(0) < -\delta\} +$$

$$+ \sup_{t_1 < t_2 < t_3,\ t_3 - t_1 < \frac{8}{N_s}} \mathbf{P}\{|\xi^{(s)}(t_1) - \xi^{(s)}(t_2)| + |\xi^{(s)}(t_2) - \xi^{(s)}(t_3)| -$$

$$- |\xi^{(s)}(t_3) - \xi^{(s)}(t_1)| > \delta\}$$

и, значит,

$$\lim_{s \to \infty} \mathbf{P}\{\inf_{t' < t'',\ t', t'' \in \left(\bar{t}_j - \frac{4}{N_s},\ \bar{t}_j + \frac{4}{N_s}\right)} (\xi_{n_{k_s}}(t'') - \xi_{n_{k_s}}(t')) < -\varepsilon\} = 0,$$

что противоречит (4.25). Теорема доказана.

Из 4.5, аналогично тому, как из 2.2 выводились 2.3 и 2.6, можно получить следующие две теоремы.

4.6. **Теорема**. *Пусть $\xi_0(t)$ с вероятностью 1 монотонно возрастающий процесс, и распределения $\xi_n(t)$ сходятся к распределениям $\xi_0(t)$ для всех t из некоторого всюду плотного на $[0,1]$ множества, содержащего 0 и 1. Тогда для любого M_1-непрерывного функционала f распределение $f(\xi_n(t))$ сходится к распределению $f(\xi_0(t))$ лишь только*

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \inf_{0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant 1} (m_n(t_2) - m_n(t_1)) \geqslant 0,$$

где $m_n(t)$ определены равенством (2.7).

4.7. **Теорема**. *Если $\xi_0(t)$ с вероятностью 1 монотонно возрастающий процесс, распределения $\xi_n(t)$ сходятся к распределениям $\xi_0(t)$ для всех t из некоторого всюду плотного на $[0,1]$ множества, содержащего 0 и 1, то существуют такие функции $x_n(t)$, что для каждого M_1-непрерывного функционала f распределение $f(\xi_n(t) - x_1(t))$ сходится к распределению $f(\xi_0(t))$.*

Легко построить пример, когда распределения $f(\xi_n(t))$ сходятся к распределению $f(\xi_0(t))$ для любого M_1-непрерывного функционала, но существует $\mathbf{J}_1$-непрерывный функционал F, для которого распределение $F(\xi_n(t) - x_n(t))$ не сходится к распределению $F(\xi_0(t) - x_0(t))$, каковы бы ни были $x_n(t)$ и $x_0(t)$. Оказывается, что топологии $\mathbf{J}_2$ и M_2 могут применяться, в отличие от топологии M_1, лишь в том частном случае, когда $\xi_n(t)$ и $\xi_0(t)$ не случайные функции. Точнее говоря, справедлива следующая теорема:

4.8. **Теорема.** *Если для любого $\mathbf{J}_2(M_2)$-непрерывного функционала f распределение $f(\xi_n(t))$ сходится к распределению $f(\xi_0(t))$, то существуют функции $x_n(t)$ такие, что $x_n(t)$ сходится к $x_0(t)$ в топологии $\mathbf{J}_2(M_2)$, $\xi_0(t) - x_0(t)$ стохастически непрерывен во всех точках разрыва $x_0(t)$ и для любого $\mathbf{J}_1(M_1)$ непрерывного функционала F распределение $F(\xi_n(t) - x_n(t))$ сходится к распределению $F(\xi_0(t) - x_0(t))$.*

Мы не будем останавливаться на доказательстве этой теоремы; его можно получить точно такими же методами, как и 4.1 и 4.3.

Таким образом, топологии $\mathbf{J}_2$ и M_2 не более естественны в случае процессов с независимыми приращениями, чем любая другая топология пространстве K.

§ 5. Предельные теоремы для случайных процессов в банаховом пространстве

В настоящем параграфе мы приведем некоторые результаты о необходимых и достаточных условиях сходимости распределения $f(\xi_n(t))$ к распределению $f_0(\xi(t))$, где функционал, непрерывный в одной из топологий $\mathbf{J}_1$, $\mathbf{J}_2$, M_1, M_2, а процессы $\xi_n(t)$ — процессы с независимыми приращениями в сепарабельном банаховом пространстве. Доказательство этих предельных теорем может быть только формально сложнее, по сравнению с доказательством соответствующих предельных теорем для одномерного случая, и мы не будем их здесь приводить*.

Пусть

$$\Delta^P_{\mathbf{J}_1}(c, \xi(t), \varepsilon) = \sup_{t-c\leqslant t_1<t<t_2\leqslant t+c} \mathbf{P}\{\min[\|\xi(t)-\xi(t_1)\|;\ \|\xi(t_2)-\xi(t)\|] > \varepsilon\},$$

$$\Delta^P_{M_1}(c, \xi(t), \varepsilon) = \sup_{t-c\leqslant t_1<t<t_2\leqslant t+c} \mathbf{P}\{\inf_{0<\beta<1} \|\beta\xi(t_1)+(1-\beta)\xi(t_2)-\xi(t)\| > \varepsilon\},$$

$$\Delta^P_{\mathbf{J}_1}(c, \xi(t), \varepsilon) = \sup_{t\in[0,1]} \mathbf{P}\{\min[\|\xi(t)-\xi(t_1)\|;\ \|\xi(t_2)-\xi(t)\|] > \varepsilon\},$$

$$t_1\in\left[t_c, \frac{t_c+t}{2}\right],\ t_2\in\left[\frac{t_c^*+t}{2}, t_c^*\right]$$

$$\Delta^P_{M_2}(c, \xi(t), \varepsilon) = \sup_{t\in[0,1]} \mathbf{P}\{\inf_{0<\beta<1} \|\beta\xi(t_1)+(1-\beta)\xi(t_2)-\xi(t)\| > \varepsilon\}.$$

$$t_1\in\left[t_c, \frac{t_c+t}{2}\right],\ t_2\in\left[\frac{t_c^*+t}{3}, t_c^*\right]$$

Здесь $t_c = \max(0, t-c)$; $t_c^* = \min(1, t+c)$. Обозначим через S одну из топологий $\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2, M_1$ или M_2.

5.1. **Теорема.** *Для того чтобы для любого S-непрерывного функционала f распределение $f(\xi_n(t))$ сходилось к распределению $f(\xi_0(t))$ необходимо и достаточно, чтобы*:

а) *конечномерные распределения $\xi_n(t)$ сходились к конечномерным распределениям $\xi_0(t)$ для всех t из некоторого всюду плотного на $[0,1]$ множества, содержащего 0 и 1*;

б) *для всякого $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{c\to 1}\lim_{n\to\infty} \Delta^P_S(c, \xi_n(t), \varepsilon) = 0.$$

Если мы сравним условие б) теоремы 5.1 с условием б) теоремы 3.2.1 из [8], то увидим, что для проверки условия б) 5.1 нужно при-

* Доказательство некоторых из этих теорем содержится в моей кандидатской диссертации «Предельные теоремы для случайных процессов».

влекать лишь трехмерные распределения $\xi_n(t)$, в то время, когда для проверки условия б) 3.2.1 из [8] нужно привлекать все конечномерные распределения $\xi_n(t)$.

Все результаты § 3, кроме теоремы 3.6, справедливы и для случайных величин и процессов в банаховом пространстве.

Отметим еще, что на случай конечномерного пространства переносятся все результаты § 1—3.

Заключение

Здесь мне бы хотелось указать на те вопросы, относящиеся к области предельных теорем для случайных процессов с независимыми приращениями, которые не затронуты в настоящей статье.

1. Мы рассматривали случайные процессы, определенные на замкнутом отрезке [0,1]. Было бы интересно рассмотреть такие процессы, которые в правом конце интервала [0,1] могут быть и не определены, более того, чтобы их никак нельзя было доопределить при $t=1$ так, чтобы они остались процессами с независимыми приращениями. Для этой цели возможно рассмотреть пространство всех функций, не имеющих разрывов второго рода на каждом отрезке $[0,\alpha]$, если $\alpha<1$ и вводить в этом пространстве различные топологии. Примером таких топологий могут служить топологии, полученные из топологий, приведенных в [8], по следующему правилу: $x_n(t)$ сходится к $x(t)$ в топологии $\bar{S}$, если для всех $t_0<1$, являющихся точками непрерывности $x(t)$, $x_n(t)$ сходится к $x(t)$ в топологии S на отрезке $[0,t_0]$. Для получения более интересных результатов нужно рассматривать топологии, учитывающие поведение и в окрестности $t=1$.

2. Мы в основном рассматривали только вопрос о существовании предельного распределения $f(\xi_n(t))$. Было бы интересно (на это указывал А. Н. Колмогоров) получать более общие теоремы, позволяющие судить об асимптотическом поведении $f(\xi_n(t))$ в случае отсутствия сходимости процесса $\xi_n(t)$ к некоторому предельному процессу. В этой статье на эту тему получен только один результат, сформулированный в теореме 3.6.

3. Часто функционалы f, имеющие смысл для $\xi_n(t)$ при каждом n, таковы, что $f(\xi_n(t))$ по вероятности неограниченно возрастает при $n\to\infty$ и для $\xi_0(t)$ вообще не имеют смысла. Тогда нашими методами нельзя выяснить асимптотическое проведение распределения $f(\xi_n(t))$. Очень важно бы было получить методы, пригодные для решения этого вопроса хотя бы для случая процессов с независимыми приращениями.

4. Все функционалы, которые встречаются как в этой статье, так и в [8], таковы, что они имеют смысл для каждой индивидуальной траектории. В то же время в теории случайных процессов часто рассматриваются такие функционалы, которые не могут быть определены для индивидуальной траектории, а определяются для всего процесса в целом. К таким функционалам относятся, в частности, всякого рода стохастические интегралы, определенные, например, в [13] или в [11], главы 6,9. С более общей точки зрения можно рассмотреть случайные аддитивные функции множества, такие, что их значения независимы для непересекающихся

множеств, и интегралы по таким аддитивным функциям. Как указал мне Р. Л. Добрушин, предельные теоремы для определенных таким образом различных стохастических интегралов могли бы найти широкое применение в различных вопросах теории случайных процессов.

Поступила в редакцию
11.1.57

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Колмогоров, Изв. АН СССР, отд. матем. и естеств. наук, 959 (1931).
[2] А. Н. Колмогоров, Изв. АН СССР, отд. матем. и естеств. наук, 363 (1933).
[3] M. Donsker, Mem. Am. Math. Soc., № 6 (1951).
[4] И. И. Гихман, Матем. збірник Київ. держ. унів., 7, 75 (1953).
[5] Ю. В. Прохоров, Успехи матем. наук, 8, вып. 3 (1953), 165.
[6] Ю. В. Прохоров, Теор. вер. и ее прим., 1, вып. 2 (1956).
[7] А. В. Скороход, ДАН СССР, 104, № 3 (1955).
[8] А. В. Скороход, Теор. вер. и ее прим., 1, вып. 3 (1956).
[9] P. Lévy, Annali Scuola Norm. Sup. Pisa (2), 3 (1934), 337—366.
[10] P. Lévy, Théorie de l'addition des variables aléatoires, Paris (1937).
[11] J. L. Doob, Stochastic process, N. J. (1953).
[12] Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогоров, Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин, ГТТИ (1949).
[13] K. Itō, Mem. Am. Math. Soc., No 4 (1951).

LIMIT THEOREMS FOR STOCHASTIC PROCESSES WITH INDEPENDENT INCREMENTS

A. V. SKOROHOD (*MOSCOW*)

(*Summary*)

The general results in [8] are used for the case of convergence of processes with independent increments.

In particular the following results are obtained:

2.6. **Theorem.** Let the distributions of processes with independent increments $\xi_n(t)$ converge to the distribution of a continuous probability process with independent increments $\xi_0(t)$ for all t.

Then, there exists an $\overline{x}_n(t)$, such that distribution $f(\xi_n(t) - \overline{x}_n(t))$ converges to distribution $f(\xi_0(t))$ if functional f is continuous in topology $\mathbf{J}_1$ (see [8]).

3.4. **Theorem.** Let $\xi_{n,1}, \ldots, \xi_{n,n}$ be independent random variables with the same distributions, and also let $\eta_{n,1}, \ldots, \eta_{n,n}$ be independent random variables with the same distributions;

$$\xi_n(t) = \sum_{i \leqslant t\,(n+1)} \xi_{n,i};\ \eta_n(t) = \sum_{i \leqslant t(n+1)} \eta_{n,i}.$$

Further, let distributions $\xi_n(t)$ and $\eta_n(t)$ converge to distribution $\xi_0(t)$ for all t.

Then, the Lévy-distance between distribution functions of random variables $f(\xi_n(t))$ and $f(\eta_n(t))$ tends to zero as $n \to \infty$, for all functional f, such that

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{\sup_t |x(t)-y(t)| \leqslant \delta} |f(x(t)) - f(y(t))| = 0.$$

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том II И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ *Выпуск 2*
1957

ON THE CONVERGENCE, BASIC DISTRIBUTIONS AND CLASSIFICATION OF ABSTRACT RANDOM VARIABLES

By SAAD K. NASR

1. Abstract. An available form of a definition of stochastic convergence of abstract random variables, may be found in definition (1). The definition is such that, a random variable which may converge in any of the classical senses, the extended sense of Fréchet and the sense of Doss, is also convergent in the sense of definition (1). The classical relations between different types of convergence are found to be, in general, preserved.

Basic distributions of a random variable have been introduced; it has been shown that the convergence in probability of a random variable, implies the convergence of its basic distributions. We have also found that the basic distributions of a random variable situated in a separable locally compact space define its law of probability.

Finally, a classification of abstract random variables, is introduced and certain particular results are obtained; the classification is according to the basic distributions of the variable.

2. Stochastic convergence of random variables. We consider a family of random variables $X_\lambda (=x_{\xi,\lambda})$ where $x_{\xi,\lambda}$ belongs to a set $\mathfrak{X}$, λ element of a set F and ξ belongs to the set of elementary events [7] on which a measure (probability) $\mathbf{P}$ is given. $\mathfrak{F}$ denotes a filter on F, A an element of $\mathfrak{F}$ and $\mathfrak{F}$ is always given by a family of elements A, constituting a base.

We assume that a separated [8] uniform structure $\mathscr{U}$ is defined on $\mathfrak{X}$ by a family D of pseudo-metrics (écarts) $d_t(x, y)$ with t element of a set T and x, y element of $\mathfrak{X}$.

2.1. Let X be a random variable in $\mathfrak{X}$. We assume that the sets $d_t(X, X_\lambda) < a$ are measurable for all $a > 0, t \in T$ and $\lambda \in F$.

Definition (1). (1.1) *Convergence in Probability*: The random variable X_λ is said to converge in probability to X, relative to D and after $\mathfrak{F}$, if for every $t \in T$, η and ε positive numbers, there exists A element of $\mathfrak{F}$ such that $\mathbf{P}[d_t(X, X_\lambda) < \eta] > 1 - \varepsilon$ for every $\lambda \in A$; $\mathbf{P}[e]$ denotes the probability of the event e.

(1.2) *Strong Convergence in Probability*: The random variable X_λ is said to converge strongly in probability to X, relative to D and after $\mathfrak{F}$, if for every $t \in T$, η and ε positive numbers, there exists A element of $\mathfrak{F}$ such that $\mathbf{P}[d_t(X, X_\lambda) < \eta$ for all $\lambda \in A] > 1 - \varepsilon$.

(1.3) *Almost Certain Convergence*: The random variable X_λ is said to converge almost certainly to X, relative to D and after $\mathfrak{F}$, if the probability that it converges to X, relative to $\mathscr{U}$ and after $\mathfrak{F}$, equals one.

In what follows, we mean by stochastic convergence, convergence in any of the above senses of definition (1).

2.2. A uniform structure $\mathscr{U}$ on $\mathfrak{X}$ is separated ([1] ch. IX) if, and only if, for every two different elements x, y of $\mathfrak{X}$, there exists $t \in T$ such that $d_t(x, y) > 0$. The condition of separation imposed on $\mathscr{U}$ may be justified by the following example.

Let Z be a random variable which takes the determinations 0 and 1 with corresponding probabilities p and q $(= 1 - p)$, and consider the function $f(x)$ defined as follows;

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{if } x < 0 \\ 0, & \text{if } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ x - 1, & \text{if } x > 1. \end{cases}$$

The pseudo-metric $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$ induces a *non-separated* uniform structure on R (a set of real numbers). Then, taking $X_n = Z$, $(n = 1,2, \ldots)$, $X = 1 - Z$ and $\mathfrak{F}$ to be the filter of Fréchet $(n \geqslant N, N > 1)$, we see that $d(X, X_n) = 0$, whereas we always have $|X - X_n| = 1$.

2.3. The classical definitions of stochastic convergence of a sequence of random numbers X_n to a random number X, were extended by Fréchet ([5], p. 309) to the case where X_n and X belong to a metric space defined by a distance function d; on replacing in the classical definitions $|X - X_n|$ by the distance $d(X, X_n)$ between X and X_n, taking $D = (d)$, we have

Theorem. *A sequence of random variables X_n which may converge stochastically in the classical sense or in the extended sense of Fréchet, to X, converges also to X, in the sense of definition* (1).

2.4. Let $\mathscr{U}$, the uniform structure induced on $\mathfrak{X}$ (by the family $(D = (d_t))$, be defined by a family of symmetric relations (entourages) V constituting a base of the filter of relations of $\mathscr{U}$.

The random variable X_λ is said to converge in probability in the sense of Doss [4] to X, after $\mathfrak{F}$, if for every V and $\varepsilon > 0$, there exists an element of $\mathfrak{F}$ such that

$$\lambda \in A \text{ implies } \mathbf{P}[(X, X_\lambda) \in V] > 1 - \varepsilon. \tag{1}$$

For any $t \in T$ and $\eta_t > 0$, there exists a symmetric relation V contained in the relation $d_t(x, y) < \eta_t$; we then have

$$\mathbf{P}[d_t(X, X_\lambda) < \eta_t] \geqslant \mathbf{P}[(X, X_\lambda) \in V]. \tag{2}$$

(1) and (2) show that if a random variable X_λ converges in probability to X, in the Doss sense, it also converges in probability to X, in the sense of definition (1.1).

An analogous result may be, similarly, obtained in the case of strong convergence in probability, while the analogue in the almost certain convergence case, is obvious; we then have

Theorem. *A family of random variables which converges stochastically in the sense of Doss, converges (stochastically) in the sense of definition* (1).

2.5. Let g_W be the superior envelope of the family $(d_t)_{t \in W}$ where W is any finite part of T. The saturated ([1] ch. IX) family $D^{(s)}$ of pseudo-metrics (g_W) is equivalent to the family $D = (d_t)$.

Theorem. *A randon variable X_λ converges stochastically to X relative to D, if and only if, it converges (stochastically) to X relative to $D^{(s)}$ (the convergence is, throughout, assumed to be after $\mathfrak{F}$).*

Proof: If the random variable X_λ converges in probability, relative to $D^{(s)}$, it obviously converges in probability, relative to D, since for all $t \in T$, $d_t \in D^{(s)}$.

Conversely, for any set W of indices $t_1, \ldots, t_k$ and any number $\eta > 0$, let e be the event consisting in that $g_W(X, X_\lambda) < \eta$, and e_s the event consisting in that $d_{t_s}(X, X_\lambda) < \eta$ with $s = 1, \ldots, k$. Since g_W is the superior envelop of $(d_t)_{t \in W}$, then from the generalied formula of Boole ([5], p. 25), we get

$$\mathbf{P}[e] = \mathbf{P}[e_1 \text{ and } e_2 \ldots \text{ and } e_k] \geqslant 1 - \{\mathbf{P}[C(e_1)] + \ldots + \mathbf{P}[C(e_k)]\}; \quad (1)$$

$C(e_s)$ is the complement of e_s.

As the random variable X_λ converges in probability to X relative to D, then for every s and η, ε positive numbers, there exists A_s element of $\mathfrak{F}$ such that

$$\mathbf{P}[d_{t_s}(X, X_\lambda) < \eta] > 1 - \frac{\varepsilon}{k} \text{ for every } \lambda \in A_s. \quad (2)$$

From (1) and (2), we see that

$$\mathbf{P}[g_W(X, X_\lambda) < \eta] > 1 - \varepsilon,$$

for every $\lambda \in \bigcap_{s=1}^{k} A_s$. This completes the proof of the theorem in the case of convergence in probability, since every finite intersection of elements of $\mathfrak{F}$ belongs also to $\mathfrak{F}$.

An analogous result may be, similarly, obtained in the case of strong convergence in probability.

Finally, since the families D and $D^{(s)}$ are equivalent, the theorem is true in the case of almost certain convergence; this completes the proof of the theorem.

2.6. If $\mathscr{U}$ and $\mathscr{U}'$ are the two uniform structures defined on $\mathfrak{X}$ by the two families of pseudo-metrics, D and D' respectively, we say [8] that D' is coarser than (or equivalent to) D if $\mathscr{U}'$ is coarser than (or equivalent to) $\mathscr{U}$.

Let X_λ be a random variable converging in probability to X, relative to a saturated family $D = (d_t)_{t \in T}$ and after $\mathfrak{F}$; $D' = (d'_w)_{w \in W}$ is another saturated family, coarser than D. Then, for every $w \in W$ and $\eta' > 0$, there exists ([1], ch. IX) $t \in T$ and $\eta > 0$ such that

$$d_t(x, y) < \eta \text{ implies } d'_w(x, y) < \eta'.$$

Hence for all λ, we have

$$\mathbf{P}[d_t(X, X_\lambda) < \eta] \leqslant \mathbf{P}[d'_w(X, X_\lambda) < \eta']. \quad (1)$$

As the random veriable X_λ converges in probability to X, relative to D and after $\mathfrak{F}$, then for $t \in T$, $\eta > 0$ and any $\varepsilon > 0$, there exists $A \in \mathfrak{F}$ such that

$$\mathbf{P}[d_t(X, X_\lambda) < \eta] > 1 - \varepsilon \text{ for every } \lambda \in A. \quad (2)$$

This being true for any $w \in W$, η' and ε positive numbers, we see from (1) and (2) that a random variable X_λ converging in probability to X relative to D and after $\mathfrak{F}$, converges also (in probability) to X, relative to any other family D' coarser than (or equivalent to) D and after $\mathfrak{F}$.

An analogous result may be, similarly, obtained in the case of strong convergence in probability; taking into consideration the theorem of 2.5, we get

Theorem. *A random variable X_λ converging stochastically to X, relative to a family D of pseudo-metrics, converges also (stochastically) to X, relative to any coarser (or equivalent) family D'; the convergence is after $\mathfrak{F}$.*

2.7. Relations between almost certain convergence and strong convergence in probability. If e and e_t are, respectively, events consisting that X_λ converges to X relative to D and d_t, then $\mathbf{P}[e] \leqslant \mathbf{P}[e_t]$, for every t. Hence, if the random variable X_λ converges almost certainly to X, we have $1 = \mathbf{P}[e] \leqslant \mathbf{P}[e_t]$, and consequently $\mathbf{P}[e_t] = 1$ for every $t \in T$. Proceeding exactly as in the case of random numbers ([5], p. 244) we see that:

A random variable X_λ that converges almost certainly to X, converges also strongly in probability to X: convergence is considered relative to D and after $\mathfrak{F}$.

Conversely, consider a random variable X_λ which converges strongly in probability to X, relative to an enumerable family of pseudometrics (d_n), $n = 1, 2, \ldots$ Proceeding exactly as in the case of random numbers ([5] p. 245), we see that X_λ converges almost certainly to X, relative to d_n, for any n. So that, the random variable X_λ converges to X for all elementary events ξ except for at most a countable number of sets of measure (probability) zero. Hence, we have

A random variable X_λ that converges strongly in probability to X, converges almost certainly to X; convergence is after $\mathfrak{F}$ and relative to (d_n).

3. Basic distributions associated with an abstract random variable. Let $f = (f_t)_{t \in T}$ be a family of real valued (finite) functions f_t defined in the set $\mathfrak{X}$ such that, for any two different elements x_1 and x_2 of $\mathfrak{X}$, there exists t element of T for which $f_t(x_1) \neq f_t(x_2)$; f is then a separating family ([2], p. 85) for the elements of $\mathfrak{X}$.

3.1. Given a random variable X in $\mathfrak{X}$, we assume in what follows that, for every $t \in T$, $X_t = f_t(X)$ is a random number. This is, for example, the case when the uniform structure ([1], ch. II) defined on $\mathfrak{X}$ by the functions (f_t) renders $\mathfrak{X}$ a separable locally compact space, and the sets $N_t = N(f_t) = \{x : f_t(x) \neq 0\}$ are σ-bounded ([6], p. 4); in such a case, the functions (f_t) are Baire measurable and owing to the separability of $\mathfrak{X}$, they are also Borel measurable ([6], p. 220). A stochastic ([3], p. 46) process,

$$H = \{X_t;\ t \in T\}$$

is then defined, the basic distributions of H are uniquely determined by

the set $(F_{t_1 \ldots t_n})$ of distribution functions

$$F_{t_1 \ldots t_n} = F_{t_1 \ldots t_n}(a_1, \ldots, a_n) = \mathbf{P}[X_{t_1} < a_1, \ldots, X_{t_n} < a_n] \tag{1}$$

where $t_1, \ldots, t_n$ is any finite subset of T.

Definition (2). (2.1) The basic distribution functions of X relative to f, are the basic distribution functions $(F_{t_1 \ldots t_n})$, defined in (1).

(2.2) A random variable X_λ, $\lambda \in F$, is said to converge in distribution to X relative to f and after $\mathfrak{F}$ (the filter defined on F), if every basic distribution function $F^{\lambda}_{t_1 \ldots t_n}$ of X_λ, converges (after $\mathfrak{F}$) to $F_{t_1 \ldots t_n}$, at points of continuity of the latter.

3.2. A simple example of basic distribution functions associated with a random variable X, relative to $f = (f_t)_{t \in T}$, may be given when T is a finite set. In this case, the basic distribution functions are uniquely ([7], ch. III) determined by the function $F_{1, 2 \ldots n} = F_{t_1 \ldots t_n}$.

Generally, when T is countable, the basic distribution functions of X, are uniquely determined by a sequence of distribution functions of the form $F_{1, 2 \ldots n}$.

The set T may be non-denumerable (continuous); this is for example the case, when $\mathfrak{X}$ is the set of functions $x = x(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, and $f = (f_t)$ where $f_t(x) = x(t)$.

In what follows, we assume that a separating family f is defined on $\mathfrak{X}$.

3.3. **Theorem.** *The basic distribution functions of a random variable X, situated in a locally compact space, define its law of probability.*

Proof: Let B be the class of sets of the form

$$\{x : [f_{t_1}(x), \ldots, f_{t_n}(x)] \in L\}$$

where $(t_1, \ldots, t_n)$ is any finite parameter set and L is any right semi-closed interval (n-dimensional). Any σ-ring $\hat{S}$ containing B, contains ([6], p. 221) the class S_0 of all Baire sets of $\mathfrak{X}$.

If $\mathfrak{B}_T = \mathfrak{B}(X_t; t \in T)$ is the Borel field generated by the class of sets of the form $\{x : f_t(x) \in M\}$, where $t \in T$ and M is any Borel set of the real line, $\mathfrak{B}_T$ is ([3], p. 47) the Borel field generated by B. Hence $\mathfrak{B}_T$ contains S_0, $(\mathfrak{B}_T \supset S_0)$.

Since the space $\mathfrak{X}$ is separable, the two classes S_0 and S of Baire and Borel sets coalesce; hence, $\mathfrak{B}_T \supset S$ and the required result follows, since the basic distribution functions of X define its law of probability for the sets of $\mathfrak{B}_T$.

A Fréchet's generalization of a distribution function. This is an example, where the basic distribution functions of a random variable X define its law of probability; X is situated in a separable metric space $(\mathscr{D})$.

In this case, there exists a denumerable set N of elements of $(\mathscr{D})$

$$x_0, x_1, \ldots, x_n \ldots,$$

such that every element of $(\mathscr{D})$ is the limit of a subsequence of N. Fréchet ([5], p. 312) has shown that the law of probability of X, is

efined by the sequence of functions

$$F_n(a_1, \ldots, a_n) = \mathbf{P}[X_1 < a_1, \ldots, X_n < a_n], \tag{1}$$

where $X_n = f_n(X)$ and

$$f_n(x) = (x, x_n) - (x_0, x_n); \tag{2}$$

$x, y)$ is the distance between the two elements x, y of $(\mathscr{D})$. *The Fréhet's distribution functions* (1) *are the basic distribution functions of the andom variable* X *relative to the separating sequence* (f_n), *defined by* (2).

3.4. Let V denotes the class of intervals $|x-y|<c$, $(c>0)$, of the traight line; $\mathscr{U}$ the most coarse uniform structure ([1], ch. II) rendering ll the functions f_t, $(t \in T)$ uniformly continuous. For every finite set f indices $(t_1, \ldots, t_n)$, consider the set $U(V_{t_1}, \ldots, V_{t_n})$ of couples (x, y) f points of $\mathfrak{X}$ such that $(f_{t_k}(x), f_{t_k}(y)) \in V_{t_k}$ element of V_t, $(k=1, \ldots, n)$; he sets U (for all possible choice of index t and relation V) forms a undamental system of relations of the structure $\mathscr{U}$.

A set $E \subset \mathfrak{X}$ is a set of continuity of the random variable $X \in \mathfrak{X}$, in he sense of Doss [4] if, for every $\varepsilon > 0$, there exists a relation U such hat

$$\mathbf{P}[X \in U(E)] - \mathbf{P}[X \in E] < \varepsilon \text{ and } \mathbf{P}[X \in U(E')] - \mathbf{P}[X \in E'] < \varepsilon; \tag{1}$$

E' denotes the complement of E.

For all possible choices of the finite set of indices $t_1, \ldots, t_n$, consider the sets

$$E = \{x : f_{t_1}(x) < \alpha_1, \ldots, f_{t_n}(x) < \alpha_n\} \equiv \{x < \alpha\}, \tag{2}$$

where $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ is any point of continuity of the basic distribution unction $F_{t_1 \ldots t_n}$. For any $\varepsilon > 0$, there exists $h = (h_1, \ldots, h_n)$, $h_k > 0$ for ll $k = 1, \ldots, n$, such that $\alpha - h = (\alpha_1 - h, \ldots, \alpha_n - h_n)$ is a point of continuity of the function $F_{t_1 \ldots t_n}$, and

$$|F_{t_1 \ldots t_n}(\alpha \pm h) - F_{t_1 \ldots t_n}(\alpha)| < \varepsilon. \tag{3}$$

The sets $U(E)$ and $U(E')$ where $U = U(V_{t_1}, \ldots, V_{t_n})$ and $V_{t_k} = |x-y| < h_k$ for $k = 1, \ldots, n$, are respectively the sets $\{x < \alpha + h\}$ and $\{x > \alpha - h\}$.

From (1) and (3), we have

Lemma. *The sets* $\{x < \alpha\}$, *defined by* (2) *are sets of continuity* (*in the sense of Doss*) *of the random variable* X.

A random variable X_λ $(\lambda \in F)$ is said to converge in distribution (Bernoulli's sense), after $\mathfrak{F}$, according to the Doss definition [4], if for every set E of continuity of X and every $\varepsilon > 0$, there exists $A \in \mathfrak{F}$ such that

$$\lambda \in A \text{ implies } |\mathbf{P}[X_\lambda \in E] - \mathbf{P}[X \in E]| < \varepsilon. \tag{4}$$

From (4) and the previous lemma, we have

Theorem. *A random variable* X_λ *which converges in distribution to* X, *in the Doss sense, converges also* (*in distribution*) *to* X *in the sense of definition* (2.2), *the convergence is after* $\mathfrak{F}$.

3.5. Let $F_{1 \ldots n}$ and $F^{\lambda}_{1 \ldots n}$ be the distribution functions of the random variables $(X_1, \ldots, X_n)$ and $(X_{\lambda,1}, \ldots, X_{\lambda,n})$ respectively; making a slight modification to a proof given by Fréchet ([5], p. 175), we get

Lemma. *For any two elements* α *and* $h=(\eta,\ldots,\eta)$, $(\eta>0)$, *of* R^n *(the n-dimensional set), there exists between the functions* $F_{1\ldots n}$ *and* $F^{\lambda}_{1\ldots n}$, *the following relation*

$$|F_{1\ldots n}(\alpha)-F^{\lambda}_{1\ldots n}(\alpha)|\leqslant\{F_{1\ldots n}(\alpha+h)-F_{1\ldots n}(\alpha-h)\}+$$

$$+\mathbf{P}[\bigcup_{i=1}^{n}|X_i-X_{\lambda,i}|\geqslant\eta]; \tag{1}$$

$\bigcup_{i=1}^{n}|X_i-X_{\lambda,i}|$ *denotes* $\max_i|X_i-X_{\lambda,i}|$.

Consider the separating family D of pseudo-metrics d_t, $t\in T$, where $d_t(x,y)=|f_t(x)-f_t(y)|$, and x, y elements of $\mathfrak{X}$; we have

Theorem. *A random variable* X_λ *that converges in probability to* X, *relative to* D *and after* $\mathfrak{F}$, *converges in distribution to* X, *relative to* $f=(f_t)$ *and after* $\mathfrak{F}$.

Proof: To fix the ideas, we replace any finite group of indices $t_1,\ldots,t_n$, by the corresponding set $1,\ldots,n$. Consider the two random variables $(X_1,\ldots,X_n)$ and $(X_{\lambda,1},\ldots,X_{\lambda,n})$; from the generalised formula of Boole, we see that

$$\mathbf{P}[\bigcup_{k=1}^{n}|X_k-X_{\lambda,k}|<\eta]=\mathbf{P}[|X_1-X_{\lambda,1}|<\eta\ldots|X_n-X_{\lambda,n}|<\eta]\geqslant$$

$$\geqslant 1-\{\mathbf{P}[|X_1-X_{\lambda,1}|\geqslant\eta]+\ldots+\mathbf{P}[|X_n-X_{\lambda,n}|\geqslant\eta]\}. \tag{2}$$

If α is a point of continuity of the function $F_{1\ldots n}$, there exists $\eta>0$ such that

$$F_{1\ldots n}(\alpha+h)-F_{1\ldots n}(\alpha-h)<\frac{\varepsilon}{2}, \tag{3}$$

where $h=(\eta,\ldots,\eta)$. Since, for all $k=1,\ldots,n$, the random number $X_{\lambda,k}$ converges in probability to X_k, relative to d_k and after $\mathfrak{F}$, there exists $A_k\in\mathfrak{F}$ such that for every $\lambda\in A_k$, we have

$$\mathbf{P}[|X_k-X_{\lambda,k}|\geqslant\eta]<\frac{\varepsilon}{2n}. \tag{4}$$

Hence, from (1), (2), (3) and (4), we get

$$|F_{1\ldots n}(\alpha)-F^{\lambda}_{1\ldots n}(\alpha)|<\varepsilon,$$

for every $\lambda\in A$ where $A=\bigcap_{k=1}^{n}A_k\in\mathfrak{F}$; this completes the proof of the theorem.

4. Classification of abstract random variables. Stochastic processes are classified ([3], p. 47), according to their basic distributions, into different classes K (Mutually independent, Laplacian, Markoff, etc.); we may then, introduce the following

Definition (3). A random variable X, is said to belong to a class K, (relative to f), if the associated (3.1) stochastic process belongs to K.

4.1. The condition of separation imposed on the family f, may be then justified by the following very simple example.

Consider a random variable X situated in the set R^3 (3-dimensional) of points $x=(x_1,x_2,x_3)$; let $f=(f_t)$, $t=1,2$, be a non-separating fami-

ly, consisting of the functions $f_1(x) = x_1$ and $f_2(x) = x_2$. If the combined random variable $(f_1(X), f_2(X))$ is laplacian, the random variable X is not necessarily laplacian.

4.2. It may be interesting to know if a random variable X, belonging to a class K relative to a family $f = (f_t)$, may also belong to K relative to another family $g = (g_w)$.

In general, this is not the case, as may be seen from the following example: Consider the two families f and g, defined in the set R (of real numbers) as follows:

$$f(x) = x, \quad x \in R,$$
$$g = (g_w), \quad w \in R,$$

where $g_w(x)$ equals 1 if $x = w$ and 0 otherwise. It is then obvious that, any laplacian random variable $X\,(= f(X))$ is not laplacian relative to g.

On the other hand, *let us take K to be the class of mutually independent* ([3], *ch.* 111) *stochastic processes.* Let τ_1 and τ_2 be the topologies induced on $\mathfrak{X}$ by $\mathscr{U}_1$ and $\mathscr{U}_2$ respectively; $\mathscr{U}_1$ and $\mathscr{U}_2$ are the most coarse uniform structures defined on $\mathfrak{X}$ by the families $f = (f_t)_{t \in T}$ and $g = (g_w)_{w \in W}$ respectively. In the following theorem, we assume that the topology τ_1 renders $\mathfrak{X}$ a locally compact space, and the set T is either infinite or of cardinality greater than that of W.

Theorem. *Let X be a random variable belonging to the class K, relative to $f = (f_t)$, where all the f_t's are proper functions. Then X belongs to K relative to any other family $g = (g_w)$ such that τ_2 is coarser than τ_1.*

(Let E_1 and E_2 be two locally compact spaces; a continuous application f_t of E_1 into E_2 is said to be proper ([2], p. 49) if the inverse image by f_t of every compact set in E_2, is a compact set in E_1).

Let $\mathscr{C}$ be the class of closed sets C of the real line. Since functions g_w are continuous and τ_2 coarser than τ_1, the sets $g_w^{-1}(C)$ are, for all w and C, closed sets in τ_1. Since the image of any closed set, by a proper function, is a closed set, we then deduce that

$$f_t(g_w^{-1}(C)) \in \mathscr{C}, \tag{1}$$

for any $t \in T$, $w \in W$ and $C \in \mathscr{C}$. Moreover, for any enumerable union of closed sets C_n, we have

$$f_t\Big(g_w^{-1}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\Big)\Big) = f_t\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} g_w^{-1}(C_n)\Big) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f_t(g_w^{-1}(C_n)); \tag{2}$$

so that from (1) and (2), we have

$$g_w^{-1}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\Big) \in f_t^{-1}(S), \tag{3}$$

where S is the σ-ring generated by the class $\mathscr{C}$.

For any enumerable intersection of closed sets C_n, we also have

$$g_w^{-1}\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n\Big) \in g_w^{-1}(\mathscr{C}) \subset f_t^{-1}(S). \tag{4}$$

The class M of Borel sets of the real line may be considered ([6], p. 66)

as the σ-ring S generated by the class $\mathscr{E}$; we then see from (3) and (4) that

$$g_w^{-1}(M) \subset f_t^{-1}(M), \tag{5}$$

for every $t \in T$ and $w \in W$.

Since the functions f_t, $t \in T$, are (stochastically) independent, then ([6], p. 192) for every finite subset $(f_{t_i}; i = 1, \ldots, n)$ of distinct functions f_{t_i} and every finite class $(M_i; i = 1, \ldots, n)$ of Borel sets of the real line, we have

$$\mathbf{P}\left[\bigcap_{i=1}^{n} (x : f_{t_i}(x) \in M_i)\right] = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}\left[(x : f_{t_i}(x) \in M_i)\right]. \tag{6}$$

(5) and (6) give the required result, since the set T is either infinite or of cardinality greater than that of W.

Remark: Let E_1 and E_2 be two locally compact (but not compact) spaces, F_1 and F_2 the compact spaces obtained on adding to E_1 and E_2 the points at infinity w_1 and w_2 respectively. A continuous mapping f of E_1 into E_2 is proper if and only if, it can be prolonged in a continuous application of F_1 in F_2, which transforms w_1 to w_2.

Поступила в редакцию
28. 2. 57

BIBLIOGRAPHY

[1] N. Bourbaki, Les structures fondamentales de l'analyse, Tome 3, Topologie générale, Paris, 1940.
[2] N. Bourbaki, Topologie générale, Fascicule de résultats, Paris, 1953.
[3] J. Doob, Stochastic processes, New York, 1953.
[4] S. Doss, Sur la convergence stochastique dans les espaces uniformes, Ann. Ec. Norm. (3), LXXI, Fasc. 1, Paris, 1954.
[5] M. Fréchet, Recherches théoriques modernes sur le calcul des probabilités, Livre 1, 2-e édition, Paris, 1950.
[6] P. Halmos, Measure theory, New York, 1951.
[7] A. Kolmogorov, Foundations of probability, New York, 1950.
[8] Saad K. Nasr, Des positions typiques d'une variable aléatoire, Ann. de l'Inst. de statistique de l'Univ. de Paris (1956), 33—42.

О СХОДИМОСТИ, СОВМЕСТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ И КЛАССИФИКАЦИИ АБСТРАКТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

САД К. НАСР (АЛЕКСАНДРИЯ)

(Резюме)

Рассматриваемая в статье сходимость абстрактных случайных величин понимается в смысле определения (1). Если случайные величины сходятся в каком-либо классическом смысле или расширенном смысле Фреше и Досса, то они будут также сходиться и в смысле определения (1). Классические соотношения между различными типами сходимости, вообще говоря, сохраняются.

Далее, для однопараметрического семейства абстрактных случайных величин определяются совместные распределения (распределения на цилиндрических множествах) и показывается, что сходимость абстрактных случайных величин влечет сходимость соответствующих совместных распределений, и что для абстрактных случайных величин, со значениями из сепарабельного, локально компактного пространства, совокупность совместных распределений полностью определяет вероятностную меру в этом пространстве.

В заключение проводится классификация абстрактных случайных величин и получаются некоторые частные результаты.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том II И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ Выпуск 2
1957

О СТРОГО МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССАХ

А. А. ЮШКЕВИЧ

§ 1. Введение

Марковский процесс можно понимать как набор функций вероятностей перехода, удовлетворяющий определенным чисто аналитическим требованиям, и как набор вероятностных мер, заданных на некотором вспомогательном пространстве Ω, которое отображается на пространство функций действительного аргумента t. Для марковских процессов удобнее рассматривать не одну вероятностную меру, а целый набор мер, соответствующих возможным начальным состояниям и начальным моментам времени. Мы условимся в первом случае говорить о переходной функции, во втором случае — о марковском процессе. Каждому марковскому процессу соответствует переходная функция, каждой переходной функции при весьма общих предположениях соответствует непустой класс марковских процессов.

Важной проблемой является нахождение условий, которые нужно наложить на переходную функцию для того, чтобы соответствующий процесс обладал теми или иными «хорошими» свойствами, как, например, сепарабельность, измеримость, непрерывность траекторий и т. п. Естественно подойти с этой точки зрения и к понятию строго марковского процесса.

Свойство строгой марковости, говоря наглядно, состоит в независимости «будущего» от «прошлого» при фиксированном «настоящем», когда под «настоящим» понимается не только значение траектории $x(t)$ в фиксированный момент t, но и значение траектории $x(\tau)$ в некоторые случайные моменты τ. Это свойство соответствует интуитивному представлению о марковском процессе, но оно, как показывают примеры, не вытекает из общепринятого определения марковского процесса. Оно нередко считалось очевидным и использовалось без всякого обоснования, в частности, в работах Леви о процессах со счетным числом состояний. Повидимому, впервые условие строгой марковости, как условие, выполнение которого требует проверки, рассматривается Дубом в [4]. Именно, в [4] свойство строгой марковости доказывается для однородного по времени процесса со счетным числом состояний без так называемых «мгновенных» состояний и величин τ, являющихся моментами первого попадания в данное состояние. В связи с изучением вопроса о дифференцируемости

переходных вероятностей свойство строгой марковости было доказано автором в [14] для стохастически непрерывных однородных по времени процессов со счетным числом состояний (без запрещения «мгновенных» состояний). При этом допускался более широкий класс величин τ (в принятой в настоящей работе терминологии — класс независящих от будущего и 0-прошлого величин τ, таких, что $x(\tau)$ имеет фиксированное значение; см. ниже определение 4)*. Наконец, Е. Б. Дынкиным и автором в [7] было введено уже само понятие строго марковского процесса для однородного случая. Там же был построен пример марковского, но не строго марковского процесса. Предположение, что такая возможность осуществима, было высказано автору А. Н. Колмогоровым. Независимо от [14] и [7] свойство строгой марковости было рассмотрено также Хантом [13] и Реем [11]. Хант вводит это свойство для однородных процессов с независимыми приращениями и моментов первого попадания τ и доказывает его для многомерного брауновского движения. Рей доказывает свойство строгой марковости для момента первого достижения фиксированной точки в однородном процессе на прямой с непрерывными (до ухода в бесконечность) траекториями при некоторых аналитических предположениях. Он строит также пример марковского, но не строго марковского процесса.

В § 2 даются определения (измеримого) марковского процесса, (измеримой) марковской переходной функции и строго марковского процесса (для неоднородного случая), причем в последнем определении «будущее» понимается шире, чем во всех цитированных выше работах. В § 3—5 в рамках этих определений рассматривается следующая

Задача 1. *Для данной измеримой переходной функции построить соответствующий строго марковский процесс.*

Указанные определения согласуются с определениями, формулируемыми Е. Б. Дынкиным в [6]. В определении марковского процесса (определение 1) отметим то обстоятельство, что траектории $x(t)$ считаются определенными при всех рассматриваемых значениях t. В определении марковской переходной функции (определение 2), как и в самой терминологии, мы следуем Дубу [5]. Определение измеримого процесса (определение 3) несколько отличается от определения этого понятия у Дуба [5]; будучи более жестким, оно обеспечивает измеримость величин $x(\tau)$. Определение 4.I восходит к [14]. Определения 4. II и 5 принадлежат Е. Б. Дынкину [6].

В § 3 приводятся примеры измеримых переходных функций, когда 1) любой соответствующий процесс строго марковский, 2) среди соответствующих измеримых процессов есть как строго марковские, так и не строго марковские, 3) любой соответствующий процесс не является строго марковским (причем соответствующие измеримые процессы существуют).

---

* Примечание при корректуре. Этот же класс процессов рассмотрен Чжуном (K. L. Chung, Foundations of the theory of continuous parameter Markov chains, Proc. Third Berkeley Sympos., V.II, 29—40 (1956). Им доказано свойство строгой марковости для момента первого попадания в фиксированное состояние в таких процессах.

В § 4 сперва формулируется признак строгой марковости для данного марковского процесса (теорема 1). Этот признак является некоторым обобщением критерия строгой марковости из [6], полученного в свою очередь переносением результатов [7] на неоднородный случай. Критерия, сформулированного в [6], для приложений, рассматриваемых в § 4, оказывается недостаточно. Для того чтобы перевести этот признак с языка процессов на язык переходных функций, в широком классе случаев достаточно найти условия, налагаемые на переходную функцию, при которых траектории $x(t)$ можно считать непрерывными справа по t в некоторой метрике ρ. Такие условия даются в теореме 2. Эти условия слабее, чем равномерная по пространству и времени стохастическая непрерывность справа (как показал Кинни [8], в последнем случае можно даже считать, что траектории не имеют разрывов второго рода), и сильнее, чем равномерная по пространству стохастическая непрерывность справа.

В § 5 рассматривается случай дискретной топологии. Теорема 3 утверждает, что если траектории непрерывны справа в дискретной топологии, то процесс строго марковский. В теореме 4 показывается, что если имеет место равномерная по пространству стохастическая непрерывность справа в дискретной топологии, то траектории можно считать непрерывными справа в дискретной топологии. (Это условие слабее равномерной по времени и пространству стохастической непрерывности в дискретной топологии, при которой, как следует из результатов Деблина [2] или Кинни [8], можно считать, что с вероятностью 1 траектории на каждом конечном интервале времени принимают лишь конечное число значений). Для случая конечного числа состояний стохастическая непрерывность справа является необходимым и достаточным условием возможности добиться непрерывности траекторий справа (теорема 5). Отметим, что необходимые и достаточные условия конечности числа скачков в процессах с конечным числом состояний получены Р. Л. Добрушиным в [3].

Все известные примеры (измеримых) «неисправимых» не строго марковских процессов основаны на том, что фазовое пространство X «слишком бедное», и в критический момент τ «некуда» поместить траекторию $x(\tau)$ так, чтобы сохранить строгую марковость. Так, в нашем примере 3 «не хватает» состояния, в котором находилась бы траектория в момент перескока из $+\infty$ в $-\infty$, в примерах из [7] и [11] состояния, при прохождении через которые траектории ведут себя по-разному, «склеены» в одну точку. Эти соображения подсказывают следующую, более общую постановку вопроса, чем в задаче 1. Скажем, что переходная функция p_1 является продолжением переходной функции p, если p_1 определена на более широком фазовом пространстве, чем p, и p всюду на своей области определения совпадает с p_1.

Задача 2. *Для данной измеримой переходной функции построить строго марковский процесс, соответствующий продолжению этой переходной функции.*

Задача 2 легче задачи 1 в том смысле, что всякое решение задачи 1 является одновременно решением задачи 2. Примеры, где бы задача 2

была неразрешима, автору не известны. Вопрос о разрешимости задачи 2 для тех или иных классов переходных функций остается открытым.

Другой возможный подход состоит в том, чтобы фазовое пространство X не расширять, но разрешить траектории $x(t)$ в некоторые случайные моменты t быть неопределенной. При этом свойство строгой марковости требуется только в те моменты τ, в которые $x(\tau)$ определено. Поскольку, таким образом, класс величин τ сужается, назовем подобные процессы почти строго марковскими (точное определение см. в § 6). Аналогом задач 1 и 2 для этого случая является

Задача 3. *Для данной измеримой переходной функции построить соответствующий почти строго марковский процесс.*

Эта задача рассматривается в § 6, где с использованием результатов из [14] устанавливается ее разрешимость для однородных стохастически непрерывных процессов со счетным числом состояний (теорема 6)*. Ясно, что задача 3 легче задачи 2, так как из всякого решения задачи 2 можно получить решение задачи 3, полагая $x(t)$ неопределенным каждый раз, когда траектория находится вне первоначально данного фазового пространства X. В качестве примера возможных применений почти строгой марковости в конце § 6 излагаются полученные в [14] с помощью этого свойства результаты о дифференцируемости переходных вероятностей процесса со счетным числом состояний.

§ 2. Определения

В § 2—5 мы будем пользоваться следующим определением марковского процесса.

Определение 1. *Марковский процесс задается следующими элементами:*

I. *Имеется фазовое точечное пространство X и некоторая σ-алгебра $\mathfrak{B}$ его подмножеств.*

II. *Имеются пространство элементарных исходов Ω, отображение $x(t, \omega)$, $(\omega \in \Omega;\ 0 \leqslant t < \infty)$, пространства Ω в пространство функций $x(t)\,(0 \leqslant t < \infty)$, принимающих значения из X, и набор мер $P_{s,x}\,(0 \leqslant s < \infty;\ x \in X)$, такие, что если обозначить через $\mathfrak{M}_{s,t}\,(0 \leqslant s \leqslant t \leqslant \infty)$ σ-алгебру из пространства Ω, порожденную ω-множествами вида*

$$\{x(u, \omega) \in \Gamma\}, \quad \Gamma \in \mathfrak{B}, \quad s \leqslant u \leqslant t, \tag{2.1}$$

то выполняются следующие условия:

A) *Мера $P_{s,x}$ задана на $\mathfrak{M}_{s,\infty}$;*

B) $P_{s,x}\{x(s, \omega) = x\} = 1$;

C) *При фиксированных $s \leqslant t$ и Γ функция*

$$p(s, x, t, \Gamma) = P_{s,x}\{x(t, \omega) \in \Gamma\} \quad (s \leqslant t) \tag{2.2}$$

является $\mathfrak{B}$-измеримой по x;

---

* Несколько изменяя доказательство, можно распространить этот результат и на неоднородный случай.

D) *При любых* $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant u$, $A \in \mathfrak{M}_{s,\,t}$, $\Gamma \in \mathfrak{B}$

$$P_{s,\,x}\{A,\, x(u,\,\omega) \in \Gamma\} = \int\limits_A p(t,\, x(t,\,\omega),\, u,\, \Gamma)\, dP_{s,\,x} \tag{2.3}$$

(*условие марковости*).

Далее, нам понадобится определение переходной функции $p(s, x, t, \Gamma)$. Для этого нужно в определении 1 исключить все, связанное с пространством Ω и функцией $x(t, \omega)$.

Определение 2. *Марковская переходная функция задается следующими элементами:*

I. *Имеется фазовое пространство* X *и некоторая* σ*-алгебра* $\mathfrak{B}$ *его подмножеств.*

II. *Имеется функция* $p(s, x, t, \Gamma)$, $(0 \leqslant s \leqslant t < \infty,\ x \in X,\ \Gamma \in \mathfrak{B})$, *удовлетворяющая следующим условиям:*

A′) *при фиксированных* s, x, t *функция* $p(s, x, t, \Gamma)$ *является вероятностной мерой по* Γ;

B′) $$p(s, x, s, \Gamma) = \begin{cases} 0, & x \notin \Gamma, \\ 1, & x \in \Gamma; \end{cases}$$

C′) *при фиксированных* s, t, Γ *функция* $p(s, x, t, \Gamma)$ *является* $\mathfrak{B}$*-измеримой по* x;

D′) $$p(s, x, t, \Gamma) = \int\limits_X p(u, y, t, \Gamma)\, p(s, x, u, dy) \tag{2.4}$$

(*уравнение Колмогорова — Чепмена*).

Будем говорить, что *марковский процесс соответствует данной переходной функции*, если фигурирующие в определениях 1 и 2 пространства X, σ-алгебры $\mathfrak{B}$ и функции $p(s, x, t, \Gamma)$ совпадают.

Для того чтобы определить строго марковский процесс, нужно сперва сформулировать понятия измеримого процесса, измеримой переходной функции, величины τ, не зависящей от будущего и s-прошлого, и величины, определяемой поведением процесса на интервале $[s, \tau]$.

Определение 3. I. *Марковский процесс называется измеримым, если для любого интервала* $[s, t]$, $(0 \leqslant s < t < \infty)$ *и любого* $\Gamma \in \mathfrak{B}$ *множество пар* u, ω, *таких, что* $x(u, \omega) \in \Gamma$, *измеримо относительно прямого (не пополненного) произведения* $\mathfrak{B}_{s,\,t} \times \mathfrak{M}_{s,\,t}$, *где* $\mathfrak{B}_{s,\,t}$ *есть* σ*-алгебра борелевских множеств на отрезке* $[s, t]$.

II. *Марковская переходная функция называется измеримой, если* $p(s, x, t, \Gamma)$ *при любом фиксированном* Γ *измеримо по совокупности* s, x, t *относительно прямого произведения* $\mathfrak{B}_{0,\,\infty} \times \mathfrak{B} \times \mathfrak{B}_{0,\,\infty}$.

Определение 4. I. *Функция* $\tau(\omega)$, *определенная на* $\Omega_\tau \in \Omega$, *называется величиной, не зависящей от будущего и* s*-прошлого, если* $\tau \geqslant s$ *и*

$$\{\Omega_\tau,\, \tau(\omega) \leqslant t\} \in \mathfrak{M}_{s,\,t}, \quad (t \geqslant s). \tag{2.5}$$

II. *Пусть* $\tau(\omega)$, $(\omega \in \Omega_\tau)$ — *величина, не зависящая от будущего и* s*-прошлого. Будем говорить, что функция* $\eta(\omega)$, *определенная на* Ω_τ, *определяется поведением процесса на отрезке* $[s, \tau]$, *если при любом* $t \geqslant s$ *и любом действительном* c

$$\{\Omega_\tau,\, \tau \leqslant t,\quad \eta \leqslant c\} \in \mathfrak{M}_{s,\,t}. \tag{2.6}$$

Ясно, что величина $\tau(\omega)$, $(\omega \in \Omega_\tau)$, не зависящая от будущего и s-прошлого, определяется поведением процесса на отрезке $[s, \tau]$.

Теперь можно дать определение строго марковского процесса.

Определение 5. *Измеримый марковский процесс с измеримой переходной функцией называется строго марковским, если при любом $s \geqslant 0$ для любой не зависящей от будущего и s-прошлого величины $\tau(\omega)$, $(\omega \in \Omega_\tau)$, и любой величины $\eta(\omega)$, $(\omega \in \Omega_\tau)$, определяемый поведением процесса на отрезке $[s, \tau]$, такой, что*

$$\eta \geqslant \tau, \tag{2.7}$$

имеет место равенство

$$P_{s,x}\{\Omega_\tau,\ x(\eta) \in \Gamma\} = \int_{\Omega_\tau} p(\tau, x(\tau), \eta, \Gamma)\, dP_{s,x}\ (\Gamma \in \mathfrak{B}). \tag{2.8}$$

Существование интеграла в (2.8) вытекает из сделанных предположений об измеримости процесса и переходной функции. Именно, легко доказывается, что если процесс измерим и τ не зависит от будущего и s-прошлого, то $x(\eta)$ (в частности, $x(\tau)$) измеримо в том смысле, что

$$\{\Omega_\tau,\ \tau \leqslant t,\ \eta \leqslant t,\ x(\eta) \in \Gamma\} \in \mathfrak{M}_{s,t},\ (\Gamma \in \mathfrak{B}) \tag{2.9}$$

(здесь существенно, что измеримость процесса понимается относительно самого прямого произведения $\mathfrak{B}_{s,t} \times \mathfrak{M}_{s,t}$, а не его пополнения). Из (2.9), очевидно, вытекает также существование величины в левой части (2.8).

§ 3. Примеры

Подставленная в § 1 первая задача состоит в построении для данной измеримой переходной функции соответствующего строго марковского процесса. Приводимые здесь примеры иллюстрируют различные встречающиеся при этом возможности. В примере 1 любой процесс, соответствующий данной переходной функции, является строго марковским. В примере 2 процесс, соответствующий данной переходной функции, может как быть, так и не быть строго марковским. В примере 3 для данной переходной функции нельзя подобрать соответствующий строго марковский процесс. При этом в примерах 2 и 3 отсутствие строгой марковости связано с невыполнением условия (2.8), а не с нарушением измеримости процесса (последний тривиальный случай интереса не представляет).

Пример 1. Пусть пространство состоит из одной точки 1 и

$$p(s, 1, t, 1) \equiv 1, \quad (s \leqslant t) \tag{3.1}$$

Для любого соответствующего процесса

$$x(t, \omega) \equiv 1, \quad (t \geqslant 0). \tag{3.2}$$

Из приводимой в § 5 теоремы 3 следует, что такой процесс обязательно строго марковский.

Пример 2. Рассмотрим однородный марковский процесс с тремя состояниями 1, 2 и 3 и переходной функцией *

$$\left.\begin{aligned} p_i^j(t) &= \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}, \quad i, j = 2, 3, \\ p_1^1(t) &= e^{-t}, \\ p_1^2(t) &= 1 - e^{-t}, \qquad (t \geqslant 0). \\ p_1^3(t) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

При начальном состоянии 2 или 3 система не совершает скачков, при начальном состоянии 1 делает один скачок в состояние 2 в случайный момент τ. Если считать траектории непрерывными при всех t, кроме момента скачка из 1 в 2, а в момент скачка положить $x(\tau) = 3$, то τ не будет зависеть от будущего и 0-прошлого и процесс не будет строго марковским (строгая марковость, очевидно, нарушается для момента τ). Если положить $x(\tau) = 2$, то τ снова не будет зависеть от будущего и 0-прошлого, но процесс уже будет строго марковским (см. теорему 3) **. Нетрудно проверить, что в обоих случаях процесс измерим. Покажем, например, что в первом случае (t, ω)-множество $\{x(t, \omega)\text{-}3,\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ $\mathfrak{B}_{0,1} \times \mathfrak{M}_{0,1}$-измеримо. В самом деле, это (t, ω)-множество является соединением следующих трех (t, ω)-множеств, каждое из которых измеримо:

$$M_1 = \{0 \leqslant t \leqslant 1\} \times \{x(0, \omega) = 3\},$$

$$M_2 = \{t = 1\} \times \{x(1, \omega) = 3\},$$

$$M_3 = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Big(\bigcup_{\substack{0 \leqslant r_1 < r_2 \leqslant 1 \\ r_2 - r_1 < \frac{1}{n}}} [\{r_1 < t < r_2\} \times \{x(r_1) = 1,\ x(r_2) = 2\}] \Big),$$

где знак $\times$ обозначает прямое произведение t- и ω-множеств, r_1 и r_2 — рациональные числа. Ясно, что таким способом можно «испортить» строгую марковость, не нарушая измеримости, в широком классе случаев.

Заменяя в примере 2 состояния 1 и 2 цепочками из счетного числа состояний, легко построить пример, в котором нельзя добиться строгой марковости.

Пример 3. Мы не будем в этом примере явно выписывать переходную функцию; при желании нетрудно сконструировать ее из распределений конечных и счетных сумм независимых слагаемых, имеющих смысл времени непрерывного пребывания в данном состоянии и распределенных каждое по показательному закону со своим параметром, и проверить, что она измерима. Вместо этого мы дадим наглядное описание процесса. Процесс однороден по времени и имеет счетное число состояний, занумерованных числами $\ldots, -1, 0, 1, \ldots$ Из состояния n возможен непосредственный переход только в состояние $n+1$, причем математическое ожидание времени, проводимого системой в n, равно $\frac{1}{1+n^2}$. После достижения $+\infty$,

* Мы пишем $p_i^j(t)$ вместо $p(s, i, s+t, j)$.

** Если положить $x(\tau) = 1$, то τ станет зависеть от будущего. По-видимому, процесс при этом будет строго марковским.

которое наступает с вероятностью 1, так как ряд $\sum \frac{1}{1+n^2}$ сходится, процесс немедленно возобновляется из $-\infty$.

Мы покажем, что случайный момент τ — «первый момент достижения $+\infty$» при любом выборе $x(t, \omega)$ не зависит от будущего, и что для любого соответствующего измеримого процесса в момент τ нарушается строгая марковость, даже если ограничиться величинами $\eta = \tau + \text{const}$. Для однородных по времени процессов такой более узкий класс величин η вполне естественен. Именно такие η фактически рассматриваются в [4], [7], [11], [13], [14]. Мы будем считать, что процесс начинается в момент 0 из состояния 0. Введем, наряду с $x(t, \omega)$, приведенную функцию $\bar{x}(t, \omega)$, определенную только для рациональных t и всюду на своей области определения совпадающую с $x(t, \omega)$. С вероятностью 1 функция $\bar{x}(t)$ скачками величины 1 возрастает от 0 до $+\infty$, затем от $-\infty$ до $+\infty$ и т. д. Положим

$$\tau_k = \inf_{\bar{x}(t)=k} t \qquad (0 < k < +\infty). \tag{3.4}$$

Легко проверить с помощью предельного перехода от конечных t-множеств к множеству всех рациональных чисел, что

$$\{s < \tau_k < t) \in \mathfrak{M}_{0,\,t}, \quad (0 < s < t, \quad 0 < k < +\infty), \tag{3.5}$$

и что с вероятностью 1 все τ_k существуют и

$$0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots \tag{3.6}$$

Определим теперь для тех ω, для которых τ_k определены и

$$\tau_k < \tau_{k+1}, \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{3.7}$$

величину τ', равную $\sup\limits_k \tau_k$. Величина τ' существует с вероятностью 1. Покажем, что τ' не зависит от будущего и 0-прошлого, т. е. что

$$\{\tau' \leqslant t\} \in \mathfrak{M}_{0,\,t}. \tag{3.8}$$

В самом деле,

$$\{\tau' \leqslant t\} = \{\tau_k < \tau_{k+1},\ \tau_k \leqslant t;\ k = 1, 2, \ldots\} =$$

$$= \{\tau_k < \tau_{k+1},\ \tau_{k+1} < t;\ k = 1,\ 2, \ldots\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{\tau_k < \tau_{k+1} < t\} = \tag{3.9}$$

$$= \bigcap_{k=1}^{\infty} \left(\bigcup_s \{\tau_k < s < \tau_{k+1} < t\} \right) \in \mathfrak{M}_{0,\,t}$$

(здесь s — все рациональные числа из $(0, t)$).

Мы допустим, что процесс строго марковский для величин $\eta = \tau + \text{const}$, и придем при этом к противоречию. Если процесс строго марковский, то $x(\tau')$ — измеримая величина, и существует такое k, что $x(\tau') = k$ с положительной вероятностью. Для определенности предположим, что $x(\tau') = 0$ с вероятностью $p > 0$. Обозначим через τ случайную величину, равную τ', но определенную только для тех ω, для которых $x(\tau') = 0$. Величина τ в силу (2.9) также не зависит от будущего.

Выберем $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы при $0 \leqslant h \leqslant 3\varepsilon$

$$P_{0,i}\{x(h) \geqslant 0\} \leqslant \frac{1}{10}, \quad (i < 0) \tag{3.10}$$

и в то же время

$$P_{0,0}\{x(h) \geqslant 0\} \geqslant \frac{3}{4}. \tag{3.11}$$

Существует такой интервал $[a, a+\varepsilon]$, что

$$q = P_{0,0}\{a < \tau < a+\varepsilon\} > 0. \tag{3.12}$$

Из (3.10) нетрудно вывести, что

$$P_{0,0}\{x(u) \geqslant 0,\ a < \tau < a+\varepsilon\} \leqslant \frac{1}{10} q, \quad (a+\varepsilon \leqslant u \leqslant a+3\varepsilon). \tag{3.13}$$

Это интуитивно очевидно, так как сколь угодно близко справа от τ функция $x(u)$ принимает отрицательные значения, и за время, меньшее 3ε, x может добраться до положительных значений с вероятностью, меньшей $\frac{1}{10}$; формально (3.13) выводится из (3.10) и (3.12) с помощью предельного перехода от конечного множества значений t ко всем рациональным t из интервала $(a, a+\varepsilon)$. Если процесс строго марковский то, поскольку $x(\tau) \equiv 0$, из (3.11) и (3.12) получаем, что

$$P_{0,0}\{x(\tau+h)\} \geqslant 0,\ a < \tau < a+\varepsilon\} \geqslant \frac{3}{4} q, \ (0 \leqslant h \leqslant 3\varepsilon). \tag{3.14}$$

Чтобы показать, что (3.13) и (3.14) противоречат друг другу, оценим, исходя из (3.13) и (3.14), двумя способами меру (t, ω)-множества

$$D = \{x(t) \geqslant 0,\ a+\varepsilon \leqslant t \leqslant a+3\varepsilon,\ a < \tau < a+\varepsilon\}. \tag{3.15}$$

В силу измеримости процесса, D измеримо относительно произведения μ меры $P_{0,0}$ на $\mathfrak{M}_{0,\infty}$ и меры Бореля на прямой t. Из (3.13) по теореме Фубини получаем

$$\mu(D) \leqslant \frac{1}{10} q \cdot 2\varepsilon = \frac{1}{5} q\varepsilon. \tag{3.16}$$

Для оценки $\mu(D)$ снизу рассмотрим (t, ω)-множество

$$D' = \{x(t) \geqslant 0,\ \tau \leqslant t \leqslant \tau+3\varepsilon,\ a < \tau < a+\varepsilon\}. \tag{3.17}$$

Множество D' также измеримо относительно меры μ, так как при любом C множество $\{t < \tau(\omega) + C\}$ является μ-измеримым, поскольку функция $\tau(\omega)$ измерима относительно $\mathfrak{M}_{0,\infty}$. Отобразим каждую точку (t, ω) — цилиндра $J = \{a < \tau < a+\varepsilon\}$ в точку

$$T\{t, \omega\} = \{h, \omega\}, \quad h = t - \tau(\omega). \tag{3.18}$$

Так как функция $\tau(\omega)$ измерима, то отображение T переводит любой прямоугольник из J, у которого t-сторона является интервалом, в измеримое (t, ω)-множество. Отсюда вытекает, что любое измеримое множество переходит в измеримое множество, так что TD' измеримо. Поскольку ω-сечения множеств D' и TD' имеют одну и ту же t-меру, то, по принципу Кавальери (см. Халмош [12], § 36, задача 5),

$$\mu(D') = \mu(TD'). \tag{3.19}$$

Согласно (3.17) и (3.18)

$$TD' = \{x(\tau + h) \geqslant 0,\ 0 \leqslant h \leqslant 3\varepsilon,\ a < \tau < a + 3\varepsilon\}. \tag{3.20}$$

Сравнивая (3.20) и (3.14), видим, что (3.14) дает оценку для мер t-сечений множества TD'. Применяя теорему Фубини, получаем

$$\mu(TD') \geqslant \frac{3}{4} q \cdot 3\varepsilon = \frac{9}{4} q\varepsilon, \tag{3.21}$$

так что, в силу (3.19)

$$\mu(D') \geqslant \frac{9}{4} q\varepsilon. \tag{3.22}$$

Из (3.15) и (3.17) следует, что

$$\left.\begin{array}{c} D \subset D', \\ D' - D \subset \{a \leqslant t \leqslant a+\varepsilon,\ a < \tau < a+\varepsilon\} \cup \{a+3\varepsilon \leqslant t \leqslant a+4\varepsilon,\ a < \tau < a+\varepsilon\}. \end{array}\right\} \tag{3.23}$$

Так как мера каждого из двух последних множеств равна $q\varepsilon$, то согласно (3.22) и (3.23)

$$\mu(D) \geqslant \mu(D') - 2q\varepsilon \geqslant \frac{1}{4} q\varepsilon, \tag{3.24}$$

а это противоречит (3.16). Таким образом, процесс не может быть строго марковским даже для величин $\eta = \tau + \text{const}$.

Нетрудно проверить, подобно тому как это сделано в примере 2, что если в момент τ перескока из $+\infty$ в $-\infty$ положить $x(\tau) \equiv 0$, а в остальные моменты времени считать траектории непрерывными справа, то рассматриваемый процесс будет измеримым. Таким образом, неразрешимость первой задачи здесь вызвана не тем, что нельзя добиться измеримости процесса.

Задача 2 (а следовательно, и задача 3) в этом примере разрешима. Именно, нужно ввести одно фиктивное состояние α (в момент перескока из $+\infty$ в $-\infty$). Переходные вероятности при начальном состоянии α нетрудно задать, рассматривая счетные суммы независимых случайных величин, являющиеся временем, проводимым в состояниях $\ldots -1, 0, 1, \ldots$

§ 4. Общие условия строгой марковости процесса и непрерывности траекторий справа

Для марковских процессов справедлив следующий признак строгой марковости:

Теорема 1. *Пусть задан марковский процесс на произвольном пространстве X с σ-алгеброй $\mathfrak{B}$ и измеримой переходной функцией $p(s, x, t, \Gamma)$. Если можно ввести в X топологию S такую, что*

а) *все траектории процесса непрерывны справа в топологии S;*

б) *для любой ограниченной, $\mathfrak{B}$-измеримой, непрерывной в топологии S функции $f(x)$ и любого $t > 0$ по крайней мере одна из функций*

$$F_1(s, x) = \int_X f(y)\, p(s, x, s+t, dy), \quad (s \geqslant 0) \tag{4.1}$$

или

$$F_2(s, x) = \int_X f(y)\, p(s, x, t, dy), \quad (t > s \geqslant 0) \tag{4.2}$$

удовлетворяет при всех $s \geqslant 0$ (*соответственно,* $t > s \geqslant 0$) *соотношению*

$$\lim F(u, y) = F(s, x) \text{ при } u \downarrow s,\ y \to x \text{ в топологии } S; \tag{4.3}$$

в) *среди* $\mathfrak{B}$*-измеримых функций непрерывные в топологии* S *функции всюду плотны в том смысле, что для любой конечной обобщенной меры* μ, *заданной на* $\mathfrak{B}$, *из равенства*

$$\int_X f(x)\, d\mu = 0 \tag{4.4}$$

для всех ограниченных непрерывных $\mathfrak{B}$*-измеримых функций вытекает, что*

$$\mu = 0, \tag{4.5}$$

и если

г) *процесс измерим,*

то процесс является строго марковским.

Эта теорема фактически доказана в [7], но сформулирована там для более узкого класса процессов. Повторять доказательство мы не будем.

Делая те или иные предположения о топологии S, можно получать из теоремы 1 более узкие, но зато проще формулируемые признаки строгой марковости. Например, если предположить, что X — метрическое пространство, σ-алгебра $\mathfrak{B}$ порождается открытыми (в смысле данной метрики) множествами из X, и что можно ввести в X новую топологию S, удовлетворяющую условиям а), б) теоремы 1 и условию

д) *любое множество из* X, *открытое в смысле заданной в* X *метрики, является открытым и в топологии* S,

то процесс является строго марковским. В самом деле, во-первых, в этом случае траектории непрерывны справа также и в смысле заданной метрики и нетрудно проверить, что процесс измерим; во-вторых, если (4.4) верно для всех $\mathfrak{B}$-измеримых S-непрерывных ограниченных функций, то оно верно, в частности, для всех ограниченных функций, непрерывных в смысле заданной метрики, а следовательно, и для всех $\mathfrak{B}$-измеримых ограниченных функций, так что имеет место (4.5). Если дополнительно предположить, что топология S совпадает с топологией, определяемой заданной в X метрикой, то получится признак строгой марковости, сформулированный в [6].

Требование б) является чисто аналитическим условием на переходную функцию; требование а), наоборот, формулируется в терминах самого процесса, а не переходной функции. Желательно поэтому найти условие на переходную функцию, при котором можно считать траектории непрерывными справа (в данной топологии S). Что касается условий в) и г), то, как следует из предыдущего абзаца, для широкого класса случаев они вытекают из а).

Теорема 2. *Пусть переходная функция* $p(s, x, t, \Gamma)$ *задана на* σ*-компактном* метрическом пространстве* X *и* $\mathfrak{B}$ *есть* σ*-алгебра, порожден-*

* Пространство называется σ-компактным, если оно является соединением счетного числа компактных множеств.

ная открытыми множествами из X. Пусть, далее, в пространстве X введено новое расстояние $\rho(x, y)$ $(x, y \in X)$, такое, что

а) *функция $\rho(x, y)$ является $\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}$-измеримой по совокупности аргументов x и y;*

б) *пространство X полно в смысле расстояния ρ;*

в) *для любых $s \geqslant 0$ и $\varepsilon > 0$ равномерно по $x \in X$*

$$\lim_{t \downarrow s} p(u, x, t, V_\varepsilon(x)) = 0, \quad (s \leqslant u \leqslant t); \tag{4.6}$$

где $V_\varepsilon(x)$ обозначает дополнение ε-окрестности точки x в смысле расстояния ρ. Тогда для данной переходной функции найдется соответствующий марковский процесс с траекториями, непрерывными справа в смысле расстояния ρ.

Прежде чем доказывать теорему 2, сделаем несколько замечаний. Можно показать на примере, что, заменить в теореме 2 условие в) более простым условием

$$\lim_{t \downarrow s} p(s, x, t, V_\varepsilon(x)) = 0 \tag{4.7}$$

нельзя, даже если потребовать в условии (4.7) равномерности по x*. С другой стороны, если условие (4.7) выполняется равномерно по x и s, то условие в) выполняется автоматически и, как показано в [8], можно добиться отсутствия у траекторий разрывов второго рода. Для однородных по времени процессов эти случаи совпадают.

Условие б) также нельзя отбросить; примером служит переходная функция процесса броуновского движения на прямой с одной выколотой точкой.

Если заранее предположить существование процесса с данной переходной функцией, то в теореме 2 можно отказаться от предположения, что X есть σ-компактное метрическое пространство, и что $\mathfrak{B}$ порождается открытыми множествами.

Комбинируя теорему 2 с теоремой 1 и сделанными после нее замечаниями, можно сформулировать следующее достаточное условие разрешимости первой задачи:

Следствие 1. *Пусть задана измеримая переходная функция $p(s, x, t, \Gamma)$ на σ-компактном метрическом пространстве X и $\mathfrak{B}$ есть σ-алгебра, порожденная открытыми множествами из X. Если можно ввести в X новое расстояние ρ, удовлетворяющее условиям* а) — в) *теоремы* 2, *такое, что в определяемой им топологии S выполняется условие* б) *теоремы* 1 *и условие* д), *то для данной переходной функции первая задача разрешима.*

Заметим, что если здесь $\rho \geqslant \rho_1$, где ρ_1 — первоначальное расстояние в X, то условие д) выполняется автоматически.

Доказательство теоремы 2. Поскольку X есть σ-компактное метрическое пространство и σ-алгебра $\mathfrak{B}$ порождается открытыми мно-

* Пример громоздкий, и мы его не приводим. Он основан на той же идее, что и пример А. Н. Колмогорова в [10] с одним мгновенным состоянием. В примере А. Н. Колмогорова нет равномерной стохастической непрерывности по пространству. Ее можно добиться, нарушая однородность процесса.

жествами, то, в силу известной теоремы Колмогорова [9], существует процесс с данной переходной функцией. Обычно эта теорема доказывается для каких-либо конкретных пространств, например для прямой. Доказательство, приведенное в [12], § 49, легко переносится на рассматриваемый случай. То обстоятельство, что в нашем определении процесса фигурирует не одна мера, а целый набор мер в пространстве функций, при доказательстве роли не играет.

Пусть $x(t)$ — какой-нибудь процесс, соответствующий данной переходной функции. Будем обозначать через $x_T(t)$ траекторию $x(t)$, рассматриваемую лишь на множестве $T \subset (0, \infty)$. Условимся говорить, что траектория $x_T(t)$ делает на отрезке $[a, b]$ m колебаний $>\varepsilon$, если из $[a, b] \cap T$ можно выбрать $m+1$ таких значений $t_0 < \ldots < t_m$, что $\rho(x(t_i), x(t_{i+1})) > \varepsilon$ для $i = 0, 1, \ldots, m-1$.

Фиксируем произвольные $s \geqslant 0$ и $\varepsilon > 0$ и рассмотрим такой отрезок $[s, t]$, что

$$p(u, x, v, V_{\frac{\varepsilon}{4}}(x)) \leqslant p < \frac{1}{2}, \tag{4.8}$$

$$(x \in X,\ s \leqslant u \leqslant v \leqslant t)$$

Лемма 1*. *Для любого конечного множества T $P_{r,x}$-вероятность p_m того, что $x_T(t)$ делает на $[a, t]$, $a = \max(r, s)$, m колебаний $>\varepsilon$, удовлетворяет неравенству*

$$p_m \leqslant \left(\frac{p}{1-p}\right)^m, \quad (m \geqslant 1). \tag{4.9}$$

Оозначим через τ_1 наименьшее значение u из $[a, t]$, при котором $x_T(u) \in V_{\frac{\varepsilon}{2}}(x(\tau_0))$, где τ_0 — наименьшее значение из $T \cap [a, t]$, через τ_2 — наименьшее значение из $[\tau_1, t]$, при котором $x_T \in V_{\varepsilon/2}(x(\tau_1))$, и т. д. Ясно, что если x_T делает m колебаний $>\varepsilon$, на $[a,b]$, то таким путем мы построим $n \geqslant m$ независящих от будущего величин $\tau_1, \ldots, \tau_n$. Таким образом,

$$p_m \leqslant q_m, \tag{4.10}$$

где q_m — верхняя грань по всем $r < t$, $x \in X$, $P_{r,x}$-вероятности того, что на отрезке $[a, t]$ можно только что описанным способом построить m величин τ_i. С помощью очевидной индукции по m (рассматриваем все возможные значения τ_1) получаем

$$q_m \leqslant q_1^m \quad (m > 0). \tag{4.11}$$

Из (4.8) при $u = \tau_1$, $v = t$, с помощью того же самого стандартного рассуждения, оценивая сверху и снизу вероятность события $x_T(t) \in V_{\frac{\varepsilon}{4}}(x(a))$, получаем

$$q_1(1-p) \leqslant p \tag{4.12}$$

или

$$q_1 \leqslant \frac{p}{1-p}. \tag{4.13}$$

Из (4.13), (4.11) и (4.10) вытекает (4.9). Лемма доказана.

* Мы здесь пользуемся рассуждениями Кинни [8].

Возьмем теперь в качестве T все рациональные неотрицательные числа и будем писать для этого случая $\bar{x}$ вместо x_T. Так как оценка (4.9) не зависит от выбора конечного множества T, то лемма справедлива и для любого счетного T. Это значит (поскольку $p_m \to 0$ при $m \to \infty$ в (4.9)), что для любого s найдется такое $t > s$, что с вероятностью 1 $\bar{x}$ делает лишь конечное число колебаний $> \varepsilon$ на $[a, t]$. Верхнюю грань таких t обозначим через $t_0(s)$. Таким образом, для каждой точки s из $[0, \infty)$ определится максимальный полуоткрытый интервал $[s, t_0(s))$ [обозначим его $I_\varepsilon(s)$], обладающий тем свойством, что на любом замкнутом лежащем в нем интервале траектория x с вероятностью 1 делает конечное число колебаний $> \varepsilon$.

Выделим из этих интервалов максимальные. Для каждой точки s введем интервал $J_\varepsilon(s) = [s_0, t_0)$, где $t_0(s)$ определено выше, а $s_0(s)$ — нижняя грань тех r, для которых $s \in I_\varepsilon(r)$. Легко проверить, что $J_\varepsilon(s) = I_\varepsilon(s_0(s))$, что $s \in J_\varepsilon(s)$ и что для двух различных s интервалы $J_\varepsilon(s)$ либо совпадают, либо не имеют общих точек. Так как длина каждого интервала J_ε положительна, то вся ось $[0, \infty)$ покрывается не более чем счетным числом неперекрывающихся интервалов J_ε. Внутри каждого интервала $J_\varepsilon = [c_i, d_i)$ выберем счетную систему замкнутых интервалов $\bar{J}_\varepsilon = [c_i, d_{ij})$, где $c_i < d_{ij} < d_i$, $d_{ij} \to d_i$. С $P_{s,x}$- вероятностью 1 величина $\bar{x}$ на каждом интервале $\bar{J}_\varepsilon \cap [s, \infty)$ делает лишь конечное число колебаний $> \varepsilon$ одновременно для всех $\bar{J}_\varepsilon$. Следовательно, множество $\Omega^u \subset \Omega$, на котором это верно одновременно для всех $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и всех интервалов $\bar{J}_\varepsilon \cap [u, \infty)$, имеет $P_{s,x}$-меру 1 при любых $0 \leqslant s \leqslant u$. В силу критерия Коши, если при $t \downarrow s$ функция $\bar{x}(t)$ не стремится к определенному пределу, то существует k, такое, что на сколь угодно малом интервале $[s, s + \delta]$, $(\delta > 0)$, функция $\bar{x}$ совершает бесконечно много колебаний $\geqslant \frac{1}{k}$ за счет выбора малого δ можно заставить интервал $[s, s + \delta]$ принадлежать одному из интервалов $\bar{J}_{\varepsilon_k}$. Это означает, что при $\omega \in \Omega^u$ функция $\bar{x}(v)$ в любой точке $t \geqslant u$ имеет предел справа, который мы обозначим $\tilde{x}(t)$. Для тех ω и t, для которых $\tilde{x}(t)$ при этом не определится, положим $\tilde{x}(t) = x_0$, где x_0 — фиксированная точка из X. Из этого построения следует, что при $\omega \in \Omega^u$ функция $\tilde{x}(t)$ непрерывна справа на интервале (u, ∞).

Величина $\tilde{x}(t)$ $P_{s,x}$-измерима $(s \leqslant t)$, так как она на $P_{s,x}$-измеримом множестве Ω^t является пределом $P_{s,x}$-измеримых величин $\bar{x}(r)$, $(r \in T, r > t)$, а на дополнении Ω^t имеем $\tilde{x}(t) = x_0$*. Так как $P_{s,x}\{\Omega^t\} = 1$, то при $r \downarrow t$ с вероятностью 1 $\bar{x}(r)$ сходится к $\tilde{x}(t)$; в силу (4.7) при этом величина $\bar{x}(r)$ сходится по $P_{s,x}$-вероятности к $x(t)$. Отсюда следует, что

$$P_{s,x}\{x(t) = \tilde{x}(t)\} = 1, \quad (s \leqslant t). \tag{4.14}$$

---

* Теорема о том, что предел последовательности измеримых функций является измеримой функцией, а также используемые дальше свойства сходимости почти всюду и сходимости по мере верны для функций, принимающих значения из любого σ-компактного метрического пространства.

Остается провести формальную замену первоначального пространства Ω на пространство Ω^* всех непрерывных справа функций $x^*(t)$ $[0 \leqslant t < \infty)$. Для этого нужно задать на Ω^* меры $P^*_{s,x}$, удовлетворяющие условиям $A - D$ определения 1 и согласованные с $p(s, x, t, \Gamma)$. По заданным переходным вероятностям конечно-аддитивная функция $P^*_{s,x}$ стандартным образом, как при построении произвольного, не обязательно непрерывного справа процесса, соответствующего данной переходной функции, определяется для алгебры $\mathfrak{N}^*_{s,\infty}$, состоящей из конечных сумм множеств вида

$$\{x^*(t_1) \in \Gamma_1, \ldots, x^*(t_n) \in \Gamma_n\}, \quad (\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n \in \mathfrak{B};\ s \leqslant t_1 < \ldots < t_n) \tag{4.15}$$

(n конечное, не фиксированное). Если $P^*_{s,x}$ счетно-аддитивна на $\mathfrak{N}^*_{s,\infty}$, то ее можно расширить на σ-алгебру $\mathfrak{M}^*_{s,\infty}$, порожденную алгеброй $\mathfrak{N}^*_{s,\infty}$. Чтобы доказать счетную аддитивность $P^*_{s,x}$ на $\mathfrak{N}^*_{s,\infty}$, достаточно проверить, что если $A^*_k \in \mathfrak{N}^*_{s,\infty}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, $A^*_1 \supset A^*_2 \supset \ldots$ и $\bigcap\limits_k A^*_k$ — пустое множество, то

$$\lim_{k\to\infty} P^*_{s,x}\{A^*_k\} = 0. \tag{4.16}$$

Каждому A^*_k можно сопоставить ω-множество $A_k \subset \mathfrak{M}_{s,\infty}$, заменяя в (4.15) x^* на $\widetilde{x}$. При этом, поскольку x и x^* по построению имеют одинаковые конечномерные распределения, а x и $\widetilde{x}$ имеют одинаковые конечномерные распределения в силу (4.14), то

$$P^*_{s,x}\{A^*_k\} = P_{s,x}\{A_k\}. \tag{4.17}$$

Далее, из вида множеств (4.15) и того, что Ω^* содержит все непрерывные справа функции, следует, что включению ω^*-множеств из $\mathfrak{N}^*_{s,\infty}$ соответствует включение соответствующих n-мерных множеств из прямого произведения пространств X, на которые ω^*-множества из $\mathfrak{N}^*_{s,\infty}$ отображаются с помощью функции x^*, а следовательно, и включение аналогичных ω-множеств из $\mathfrak{M}_{s,\infty}$. Таким образом,

$$A_1 \supset A_2 \supset \ldots. \tag{4.18}$$

Если

$$\lim_{k\to\infty} P^*_{s,x}\{A^*_k\} = \delta > 0, \tag{4.19}$$

то, согласно (4.17), и

$$\lim_{k\to\infty} P_{s,x}\{A_k\} = \delta > 0; \tag{4.20}$$

в силу (4.18) и счетной аддитивности меры $P_{s,x}$ это означает, что пересечение A множеств A_k имеет $P_{s,x}$-меру δ. Поскольку ω-множество Ω^s имеет $P_{s,x}$-меру 1, существует точка ω_1, принадлежащая A и Ω^s. Функция $\widetilde{x}(t, \omega_1)$ непрерывна справа при $s \leqslant t < \infty$. Положим

$$x^*_1(t) = \begin{cases} \widetilde{x}(s, \omega_1), & 0 \leqslant t < s, \\ \widetilde{x}(t, \omega_1), & s \leqslant t < \infty. \end{cases} \tag{4.21}$$

Функция $x^*_1(t)$ принадлежит A^*_k при любом k и непрерывна справа; полученное противоречие доказывает (4.16). Мера $P^*_{s,x}$ на $\mathfrak{M}^*_{s,\infty}$ построена.

Условия B и C из определения 1 для меры $P^*_{s,x}$ вытекают из свойств B' и C' переходной функции (см. определение 2). Условие D для множеств вида (4.15) из $\mathfrak{M}^*_{s,t}$ выполняется по самому построению меры $P^*_{s,x}$. Поскольку правая и левая части (2.3) счетно-аддитивны по A, отсюда стандартным образом вытекает справедливость (2.3) для любого A^* из $\mathfrak{M}^*_{s,t}$.

§ 5. Случай дискретной топологии

Для дискретной топологии S результаты предыдущего параграфа значительно упрощаются.

Теорема 3. *Пусть марковский процесс задан на произвольном пространстве X. Если все траектории процесса непрерывны справа в дискретной топологии, то процесс является строго марковским.*

Рассматриваемый в теореме 3 класс процессов несколько шире класса так называемых чисто разрывных процессов.

Доказательство теоремы 3. Нужно проверить, что в рассматриваемом случае условия б) — г) теоремы 1 выполняются в силу одной лишь непрерывности траекторий справа, и что функция $p(s, x, t, \Gamma)$ измерима. Условие б) (во второй форме) для дискретной топологии сводится к требованию, чтобы для любой ограниченной $\mathfrak{B}$-измеримой функции $f(x)$, любого $t>0$ и любого $x\in X$ функция

$$F(s, x)=\int_X f(y)\, p(s, x, t, dy),\ 0\leqslant s<t \tag{5.1}$$

была непрерывна справа по s. Из непрерывности траекторий справа вытекает стохастическая непрерывность справа, так что при любых s, x

$$p(s, x, u, x)\to 1 \text{ при } u\downarrow s. \tag{5.2}$$

Если $f(y)=\chi_\Gamma(y)$ — характеристическая функция множества $\Gamma\in\mathfrak{B}$, то (5.1) сводится к

$$F(s, x)=p(s, x, t, \Gamma) \tag{5.3}$$

и требуемое соотношение вытекает из (5.2) и равенства

$$p(s, x, t, \Gamma)=p(s, x, u, x)\cdot p(u, x, t, \Gamma)+$$

$$+\int_{X-\{x\}} p(u, z, t, \Gamma)\, p(s, x, u, dz)\quad (s<u<t). \tag{5.4}$$

Так как $F(s, x)$ линейно зависит от $f(y)$, то $F(s, x)$ непрерывно справа по s и для любой функции f, принимающей лишь конечное число значений. Для произвольной ограниченной измеримой функции $f(y)$ и любого $\varepsilon>0$ всегда можно подобрать измеримую функцию $g(y)$, принимающую лишь конечное число значений, такую, что

$$|f(y)-g(y)|<\varepsilon. \tag{5.5}$$

Тогда и

$$|F(s, x)-G(s, x)|<\varepsilon,\quad (x\in X,\ 0\leqslant s<t), \tag{5.6}$$

где

$$G(s, x) = \int_X g(y)\, p(s, x, t, dy). \tag{5.7}$$

Соотношение (5.6) показывает, что функцию $F(s, x)$, $(0 \leqslant s < t)$, можно равномерно аппроксимировать непрерывными справа по s функциями $G(s, x)$; ясно, что в таком случае и сама функция $F(s, x)$ непрерывна справа по s.

Условие в) теоремы 1 в дискретной топологии выполняется тривиальным образом, так как любая функция является непрерывной.

Проверим условие г), состоящее в измеримости процесса. Нужно показать, что

$$\{x(u, \omega) \in \Gamma, \quad s \leqslant u \leqslant t\} \in \mathfrak{B}_{s, t} \times \mathfrak{M}_{s, t}, \tag{5.8}$$

где $\mathfrak{B}_{s, t}$ — σ-алгебра борелевских множеств на $[s, t]$. Положим

$$x_n(u, \omega) = x\Big(s + k\frac{t-s}{n}, \omega\Big), \quad s + (k-1)\frac{t-s}{n} \leqslant u < s + k\frac{t-s}{n},$$

$$x_n(t, \omega) = x(t, \omega), \qquad k = 1, 2, \ldots, n; \; n = 1, 2, \ldots \tag{5.9}$$

Справедливость (5.8) с $x(u, \omega)$, замененным на $x_n(u, \omega)$, очевидна. Поскольку в силу предположенного свойства траекторий

$$\{x(u, \omega) \in \Gamma, s \leqslant u \leqslant t\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \{x_n(u, \omega) \in \Gamma, s \leqslant u \leqslant t\}, \tag{5.10}$$

отсюда следует (5.8).

Проверим, наконец, что переходная функция $p(s, x, t, \Gamma)$ измерима. Как было показано при доказательстве условия б), переходная функция непрерывна справа по s. Далее, поскольку

$$p(s, x, t+h, \Gamma) = \int_X p(t, y, t+h, \Gamma)\, p(s, x, t, dy), \quad (s \leqslant t, \; h > 0) \tag{5.11}$$

и подинтегральная функция здесь, будучи ограниченной, при $h \downarrow 0$ согласно (5.2) сходится к характеристической функции множества Γ, то

$$\lim_{h \downarrow 0} p(s, x, t+h, \Gamma) = p(s, x, t, \Gamma), \tag{5.12}$$

т. е. переходная функция непрерывна справа и по t. По аргументу x она $\mathfrak{B}$-измерима по определению. Положим

$$p_{kn}(s, x, t, \Gamma) = p\Big(\frac{i}{k}, x, \frac{j}{n}, \Gamma\Big) \text{ при } \frac{i-1}{k} \leqslant s < \frac{i}{k}, \; \frac{j-1}{n} \leqslant t < \frac{j}{n}$$

$$i, j = 1, 2, \ldots, \; k = n, n+1, \ldots, \; n = 1, 2, \ldots. \tag{5.13}$$

Ясно, что все функции $p_{kn}(s, x, t, \Gamma)$ измеримы относительно $\mathfrak{B}_{0, \infty} \times \mathfrak{B} \times \mathfrak{B}_{0, \infty}$. В силу непрерывности $p(s, x, t, \Gamma)$ справа по s и t имеем

$$p(s, x, t, \Gamma) = \lim_{n \to \infty} \lim_{k \to \infty} p_{kn}(s, x, t, \Gamma), \tag{5.14}$$

так что функция $p(s, x, t, \Gamma)$ также измерима относительно $\mathfrak{B}_{0, \infty} \times \mathfrak{B} \times \mathfrak{B}_{0, \infty}$. Теорема доказана.

Условия на переходную функцию, при которых можно добиться непрерывности траекторий справа, в случае дискретной топологии принимают следующий вид:

Теорема 4. *Пусть переходная функция $p(s, x, t, \Gamma)$ задана на σ-компактном метрическом пространстве X и $\mathfrak{B}$ есть σ-алгебра, порожденная открытыми множествами из X. Если при каждом $s \geqslant 0$ равномерно по $x \in X$*

$$\lim_{t \downarrow s} p(s, x, t, x) = 1, \tag{5.15}$$

то существует соответствующий марковский процесс с траекториями, непрерывными справа в дискретной топологии.

Доказательство. Покажем, что в рассматриваемом случае применима теорема 2 с

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y. \end{cases} \tag{5.16}$$

Проверим, что функция $\rho(x, y)$ является $\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}$-измеримой. В силу (5.16) достаточно убедиться, что «диагональ» $\{x = y\}$ принадлежит $\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}$ (мы считаем здесь и дальше, что x берется из первого сомножителя X, а y из второго сомножителя X). Поскольку X есть σ-компактное метрическое пространство, для любого $\varepsilon > 0$ в X существует счетная последовательность открытых сфер $U_k(\varepsilon)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ радиуса ε (в смысле первоначального расстояния в X, а не расстояния ρ), покрывающих X. В силу предположения о структуре $\mathfrak{B}$ имеем

$$U_k(\varepsilon) \in \mathfrak{B}, \tag{5.17}$$

так что и

$$R_k(\varepsilon) = \{x \in U_k(\varepsilon),\ y \in U_k(\varepsilon)\} \in \mathfrak{B} \times \mathfrak{B}. \tag{5.18}$$

Измеримость множества $\{x = y\}$ вытекает теперь из соотношения

$$\{x = y\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} R_k\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{5.19}$$

Полнота пространства X в смысле расстояния ρ очевидна.

Условие в) теоремы 2) для $\varepsilon > 1$ выполняется тривиальным образом. Для $\varepsilon \leqslant 1$ оно также справедливо, если только

$$\lim_{t \downarrow s} p(u, x, t, x) = 1, \quad (s \leqslant u \leqslant t) \tag{5.20}$$

для любого $s \geqslant 0$ равномерно по $x \in X$. Докажем (5.20). В силу марковского свойства

$$p(s, x, t, x) = p(s, x, u, x) \cdot p(u, x, t, x) + \\ + \int_{X - \{x\}} p(u, y, t, x)\, p(s, x, u, dy). \tag{5.21}$$

При $t \downarrow s$ в соотношении (5.21) величины $p(s, x, t, x)$ и $p(s, x, u, x)$ согласно (5.15) стремятся к 1, а $p(s, x, u, X - \{x\})$ стремится к 0, откуда и вытекает (5.20). Теорема доказана.

Заметим, что если (5.15) выполняется равномерно не только по x,

но и по s, то, как показал Деблин [2], можно выбрать соответствующий процесс так, чтобы на любом конечном интервале времени траектории делали лишь конечное число скачков. Отказаться в (5.15) от равномерности по x, как показывает пример счетного однородного процесса с «мгновенным» состоянием, построенный А. Н. Колмогоровым в [10], нельзя.

Если заранее предположить существование процесса с данной переходной функцией и $\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}$-измеримость «диагонали» $\{x = y\}$, то в теореме 4 можно отказаться от предположения, что X есть σ-компактное метрическое пространство, и что $\mathfrak{B}$ порождается открытыми множествами.

Из теорем 3 и 4 очевидным образом вытекает

Следствие 2. *Для переходной функции, удовлетворяющей условиям теоремы 4, первая задача разрешима.*

Рассмотрим отдельно случай конечного числа состояний. Для этого случая из теоремы 4 получается необходимое и достаточное условие непрерывности траекторий справа. Будем обозначать точки пространства X числами $1, \ldots, n$ и писать $p_i^j(s, t)$ вместо $p(s, i, t, j)$.

Теорема 5. *Для заданной переходной функции $p_i^j(s, t)$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ с конечным числом состояний соответствующий марковский процесс с непрерывными справа траекториями существует тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{t \downarrow s} p_i^i(s, t) = 1, \quad (s \geqslant 0, i = 1, \ldots, n). \tag{5.22}$$

Достаточность условия (5.22) вытекает из теоремы 4. Необходимость условия (5.22) очевидна, поскольку непрерывность траекторий справа влечет за собой стохастическую непрерывность справа.

Ясно, что условие (5.22) является достаточным для разрешимости задачи 1 в случае конечного числа состояний.

Отметим, что в случае конечного числа состояний скачки $x(t)$ могут накопляться лишь слева от некоторых фиксированных точек, а именно правых концов рассмотренных при доказательстве теоремы 2 интервалов J (в дискретной топологии $J(\varepsilon)$ не зависит от ε). Их число не более чем счетно. Довольно ясно, что внутри каждого интервала J процесс полностью характеризуется чем-то вроде «плотностей вероятностей перехода из i в j» $a_{ij}(t)$ (плотности в чистом виде могут не существовать: примером служит однородный стохастически непрерывный процесс, в котором ось t преобразована недифференцируемым образом). Интересно выяснить, какими дополнительными характеристиками задается переход к процессу на очередном интервале J от процесса на предыдущем интервале (или последовательности предыдущих интервалов, если непосредственно предшествующий интервал не существует).

§ 6. Почти строго марковские процессы; счетный однородный случай

Настоящий параграф посвящен сформулированной во введении третьей задаче.

Почти строго марковский процесс не является марковским процессом в смысле определения 1. Чтобы охватить рассматриваемый случай, нужно

в определении 1 марковского процесса разрешить функции $x(t, \omega)$ быть определенной не для всех t из интервала $[0, \infty)$; в остальном определение 1 остается без изменений. Будем называть такие процессы марковскими процессами с траекториями, определенными не при всех t. Измеримый марковский процесс с траекториями, определенными не при всех t, определяется точно так же, как и просто измеримый марковский процесс (см. определение 3.1). Как и при прежнем определении, если процесс измерим, если $\tau(\omega)$, $(\omega \in \Omega_\tau)$, не зависит от будущего и s-прошлого, и если $\eta(\omega)$, $(\omega \in \Omega_\tau)$, определяется поведением процесса на отрезке $[s, \tau]$, то

$$\{\Omega_\tau,\ \tau \leqslant t,\ \eta \leqslant t,\ x(\eta) \in \Gamma\} \in \mathfrak{M}_{s,t},\ (\Gamma \in \mathfrak{B}) \tag{6.1}$$

(доказательство этого факта при переходе к новому определению не меняется). В частности, поскольку τ определяется поведением процесса на $[s, \tau]$, имеем

$$\{\Omega_\tau,\ x(\tau) \in X\} \in \mathfrak{M}_{s,\infty}, \tag{6.2}$$

но теперь не обязательно

$$\{\Omega_\tau,\ x(\tau) \in X\} = \Omega_\tau. \tag{6.3}$$

Величины τ, удовлетворяющие условию (6.3), будем называть *допустимыми*.

Определение 6. *Измеримый марковский процесс с траекториями, определенными не при всех t, и измеримой переходной функцией называется почти строго марковским процессом, если при любом $s \geqslant 0$ для любой допустимой не зависящей от будущего и s-прошлого величины $\tau(\omega)$, $(\omega \in \Omega_\tau)$ и любой величины $\eta(\omega)$ $(\omega \in \Omega_\tau)$, определяемой поведением процесса на отрезке $[s, \tau]$, такой, что*

$$\eta \geqslant \tau, \tag{6.4}$$

имеет место равенство

$$P_{s,x}\{\Omega_\tau,\ x(\eta) \in \Gamma\} = \int_{\Omega_\tau} p(\tau,\ x(\tau), \eta,\ \Gamma)\, dP_{s,x},\ (\Gamma \in \mathfrak{B}). \tag{6.5}$$

Левая часть (6.5) имеет смысл в силу (6.1), правая часть (6.5) имеет смысл в силу измеримости переходной функции, а также измеримости τ, η и $x(\tau)$ относительно $\mathfrak{M}_{s,\infty}$.

Как уже отмечалось во введении, автору не известны примеры измеримых переходных функций, для которых нельзя было бы построить соответствующий почти строго марковский процесс. В имеющихся примерах измеримых не строго марковских процессов всегда можно добиться почти строгой марковости, считая $x(t)$ неопределенным в те моменты τ, для которых нарушается условие строгой марковости (2.8) или (6.5).

При рассмотрении третьей задачи мы ограничимся случаем однородного процесса со счетным числом состояний. Приводимая ниже теорема 6 допускает обобщение примерно в том же направлении, в каком случай конечного числа состояний обобщается следствием 1. Будем писать в рассматриваемом случае $p_\alpha^\beta(t)$ вместо $p(s, \alpha, s+t, \beta)$.

Теорема 6. *Если переходная функция* $p_\alpha^\beta(t)$ $(\alpha,\ \beta = 1, 2, \ldots; 0 \leqslant t < \infty)$ *однородного процесса со счетным числом состояний* $1, 2, \ldots$ *удовлетворяет условию*

$$\lim_{t \to 0} p_\alpha^\beta(t) = \begin{cases} 0, & \alpha \neq \beta, \\ 1, & \alpha = \beta, \end{cases} \qquad \alpha,\ \beta = 1,\ 2,\ \ldots \tag{6.6}$$

то для этой переходной функции существует соответствующий почти строго марковский процесс.

Условие (6.6) означает стохастическую непрерывность справа. А. Н. Колмогоровым построен в [10] пример однородного стохастически непрерывного процесса со счетным числом состояний, в котором при начальном состоянии 1 с вероятностью 1 за сколь угодно малое время происходит бесконечное число скачков; этот пример показывает, что непрерывности траекторий справа в условиях теоремы 6 достичь нельзя. Однако траектории $x(t, \omega)$ можно выбрать так, что $x(t) = \alpha$ $(\alpha = 1, 2, \ldots; 0 \leqslant t < \infty)$ для тех и только тех ω, для которых существует сходящаяся справа к t последовательность точек t_i из фиксированного счетного всюду плотного множества $T \subset [0, \infty)$ таких, что $x(t_i) = \alpha$ (назовем это «свойством А»). Из этого свойства траекторий нетрудно вывести, что момент первого после s попадания в любое конечное множество состояний не зависит от будущего и s-прошлого и является допустимой величиной. Для момента первого попадания в данное бесконечное множество состояний последнее утверждение, вообще говоря, уже не имеет места. Как показывает пример 3 из § 3, добиться просто строгой марковости в условиях теоремы 6, вообще говоря, нельзя.

Доказательство теоремы 6. В [14] свойство, аналогичное строгой марковости, доказано для более узкого, чем у нас, класса величин η, а именно, для $\eta = \tau + \text{const}$. Непосредственно свести рассматриваемый случай к величинам η указанного вида не удается, и поэтому значительную часть доказательства из [14] придется повторить в несколько измененном виде, применительно к произвольным величинам η, определяемым поведением процесса на $[s, \tau]$.

Из [14] (теорема 1) следует, что для данной переходной функции можно выбрать процесс так, чтобы все траектории (определенные, вообще говоря, не для всех t) обладали сформулированным выше свойством А, и что процесс при этом будет измерим *. Далее, как известно [4, 10], из условия (6.6) вытекает непрерывность функций $p_\alpha^\beta(t)$ по t, так что переходная функция является измеримой. Таким образом, остается проверить справедливость равенства (6.5), если выполнено условие А.

---

* В [14] марковский процесс и измеримый марковский процесс (с траекториями, определенными не при всех t), определяются несколько иначе, чем здесь, и поэтому непосредственное использование соответствующего утверждения из [14] незаконно (в [14], поскольку процесс однородный, рассматривается набор мер P_α, а не $P_{s,\alpha}$, рассматривается набор пространств Ω_α, а не одно Ω, как здесь, и, наконец, все меры считаются полными). Однако, опираясь на процесс, построенный в [14], нетрудно, аналогично тому, как это делается в конце доказательства теоремы 2, перейти к процессу в смысле данного здесь определения со свойством траекторий А. Доказательство измеримости процесса, данное в [14], сохраняет силу и для нашего определения измеримости, если только выполнено свойство А.

Пусть $\tau(\omega)$, $(\omega \in \Omega_\tau)$—допустимая величина, не зависящая от будущего и s-прошлого, $\eta_1(\omega)$, $(\omega \in \Omega_\tau)$ определяется поведением процесса на $[s, \tau]$ и $\eta_1 \geqslant \tau$. Положим

$$\Omega_\tau^\beta = \Omega_\tau \cap \{x(\tau) = \beta\}, \quad \beta = 1, 2, \ldots \tag{6.7}$$

В силу (6.1) с η_1, замененным на τ, множества Ω_τ^β принадлежат $\mathfrak{M}_{s,\infty}$. Множества Ω_τ^β не пересекаются, и так как τ — допустимая величина, то $\Omega_\tau = \bigcup_\beta \Omega_\tau^\beta$. Поскольку левая и правая части равенства (6.5) счетно-аддитивны по Ω_τ, достаточно доказать (6.5) с Ω_τ, замененным на Ω_τ^β. Далее, обе части равенства (6.5) счетно-аддитивны по Γ, и поэтому достаточно доказать (6.5) для одноточечных множеств $\{\gamma\}$. Таким образом, (6.5) в нашем случае сводится к равенству

$$P_{s,\alpha}\{\Omega_\tau^\beta,\ x(\eta) = \gamma\} = \int_{\Omega_\tau^\beta} p_\beta^\gamma(\eta - \tau)\, dP_{s,\alpha}. \tag{6.8}$$

Если $\eta_1 = \tau$, то (6.8) превращается в очевидное тождество; достаточно поэтому доказать (6.8) в предположении

$$\eta_1 > \tau, \quad (\omega \in \Omega_\tau^\beta) \tag{6.9}$$

(в общем случае Ω_τ^β разбивается на подмножества

$$\Omega_\tau^\beta \cap \{\eta = \tau\} \quad \text{и} \quad \Omega_\tau^\beta \cap \{\eta > \tau\}).$$

Разобьем интервал $[s, \infty)$ на отрезки длины $\frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и положим

$$\Omega_{nk} = \{\Omega_\tau^\beta,\ t_n^{k-1} \leqslant \tau < t_k^k,\ \eta \geqslant t_n^k,\ x(t_n^k) = \beta\}, \tag{6.10}$$

$$t_n^k = s + \frac{k}{n};\ k,\ n = 1, 2, \ldots$$

Множества Ω_{nk} не пересекаются и в силу свойств τ и η

$$\Omega_{nk} \in \mathfrak{M}_{s,\, t_n^k}. \tag{6.11}$$

Пусть

$$\Lambda_n = \Omega_\tau^\beta - \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_{nk}. \tag{6.12}$$

Покажем, что

$$\lim_{n\to\infty} P_{s,\alpha}\{\Lambda_n\} = 0. \tag{6.13}$$

Согласно определению Λ_n и Ω_{nk}

$$\Lambda_n \subset \{\Omega_\tau^\beta,\ \eta - \tau \leqslant \frac{1}{n}\} \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega'_{nk}, \tag{6.14}$$

где

$$\Omega'_{nk} = \{\Omega_\tau^\beta,\ t_n^{k-1} \leqslant \tau < t_n^k,\ x(t_n^k) \neq \beta\}. \tag{6.15}$$

В силу (6.9) $P_{s,\alpha}$-мера первого из множеств в правой части (6.14) при $n \to \infty$ стремится к нулю. Оценим $P_{s,\alpha}\{\Omega'_{nk}\}$. Возьмем на отрезке $[t_n^{k-1}, t_n^k)$ конечное множество точек $S \subset T$, где T — заранее выбранное

четное всюду плотное множество, фигурирующее в условии А. Рассмотрим событие $\Omega_{nk}(S)$, состоящее в том, что имеет место $\{\Omega_\tau^\beta,\ t_n^{k-1} \leqslant \tau < t_n^k\}$ и что траектория $x(t)$ принимает значение β в одной из точек S, лежащих правее τ. Имеем

$$P_{s,\alpha}\{\Omega'_{nk}\} \leqslant P_{s,\alpha}\{\Omega'_{nk},\ \Omega_{nk}(S)\} + \\ + P_{s,\alpha}\{t_n^{k-1} \leqslant \tau < t_n^k,\ x(\tau) = \beta,\ \overline{\Omega_{nk}(S)}\}. \tag{6.16}$$

Второе слагаемое в (6.16) благодаря свойству А траекторий за счет выбора достаточно плотного множества S можно сделать сколь угодно близким к 0. Для оценки первого слагаемого обозначим $s_1 < \ldots < s_m$ точки множества S. Тогда

$$P_{s,\alpha}\{\Omega'_{nk},\ \Omega_{nk}(S)\} = \sum_{i=1}^{m} P_{s,\alpha}\{{}_i\Omega,\ x(t_n^k) \neq \beta\}, \tag{6.17}$$

где

$$ {}_i\Omega = \{\Omega_\tau^\beta;\ t_n^{k-1} \leqslant \tau \leqslant s_i;\quad x(s_i) = \beta; \\ x(s_j) \neq \beta,\ l \leqslant j < i,\quad \text{где}\quad l = \min_r (s_r \geqslant \tau)\}. \tag{6.18}$$

Нетрудно видеть, что ${}_i\Omega \in \mathfrak{M}_{s,s_i}$, причем если $\omega \in {}_i\Omega$, то $x(s_i) = \beta$. В силу марковского свойства

$$P_{s,\alpha}\{{}_i\Omega,\ x(t_n^k) \neq \beta\} = \int\limits_{{}_i\Omega} [1 - p_\beta^\beta(t_n^k - s_i)\, dP_{s,\alpha} \leqslant \\ \leqslant P_{s,\alpha}\{{}_i\Omega\} \cdot \max_{u \leqslant \frac{1}{n}} [1 - p_\beta^\beta(u)]. \tag{6.19}$$

Так как множества ${}_i\Omega$ не пересекаются и все они содержатся в $\{\Omega_\tau^\beta,\ t_n^{k-1} \leqslant \tau < t_n^k\}$, то из (6.18) и (6.19) получаем

$$P_{s,\alpha}\{\Omega'_{nk},\ \Omega_{nk}(S)\} \leqslant P_{s,\alpha}\{\Omega_\tau^\beta,\ t_n^{k-1} \leqslant \tau < t_n^k\} \cdot \max_{u \leqslant \frac{1}{n}} [1 - p_\beta^\beta(u)]. \tag{6.20}$$

Поскольку второе слагаемое в (6.16) сколь угодно мало, последняя оценка справедлива и для $P_{s,\alpha}\{\Omega'_{nk}\}$. Суммируя по k, получаем, что

$$P_{s,\alpha}\left\{\bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega'_{nk}\right\} \leqslant P_{s,\alpha}\{\Omega_\tau^\beta\} \cdot \max_{u \leqslant \frac{1}{n}} [1 - p_\beta^\beta(u)]. \tag{6.21}$$

Так как согласно (6.6) второй множитель в (6.21) стремится к 0 при $n \to \infty$, то в силу (6.14) соотношение (6.13) доказано.

Из (6.12) и (6.13) вытекает, что

$$P_{s,\alpha}\{\Omega_\tau^\beta,\ x(\eta) = \gamma\} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} P_{s,\alpha}\{\Omega_{nk},\ x(\eta) = \gamma\}. \tag{6.22}$$

Каждое из слагаемых справа мы оценим по теореме Фубини, пользуясь тем, что значение траектории в момент t_n^k фиксировано, значение η определяется поведением процесса слева от t_n^k, а в условие $x(\eta) = \gamma$ вхо-

дят значения траектории справа от t_n^k. Для сокращения записи положим $t_n^k = z$. Предположим, что

$$P_{s,\alpha}\{\Omega_{nk}\} = q > 0. \tag{6.23}$$

Рассмотрим прямое произведение числовой прямой I на основное пространство Ω. Каждую точку $\omega \in \Omega_{nk}$ отобразим в точку $T\omega = (u, \omega)$, где $u = \eta(\omega)$. При этом все Ω_{nk} отобразится в кривую $u = \eta(\omega)$. Положим

$$\mu\{TA\} = \frac{1}{q} P_{s,\alpha}\{A\}, \quad A \subset \Omega_{nk}, \quad A \in \mathfrak{M}_{s,\infty} \tag{6.24}$$

Для любого множества из $I \times \Omega$, не содержащего ни одной точки кривой $u = \eta(\omega)$, положим $\mu = 0$. Ясно, что μ при этом будет мерой. Мера μ индуцирует меру μ_1 на сомножителе I и меру μ_2 на сомножителе Ω. Пусть $\mathfrak{B}_{z,\infty}$ есть σ-алгебра борелевских множеств на $[z, \infty)$. Если $B \subset \mathfrak{B}_{z,\infty}$, $A \in \mathfrak{M}_{z,\infty}$, то

$$\mu\{B \times A\} = \mu\{\{B \times A \cap \Omega_{nk}\} \cap \{u = \eta(\omega)\}\} =$$

$$= \mu\{T\{A, \ \Omega_{nk}, \ \eta(\omega) \in B\}\} = \frac{1}{q} P_{s,\alpha}\{\Omega_{nk}, \ \eta(\omega) \in B, \ A\}. \tag{6.25}$$

Поскольку $\{\Omega_{nk}, \ \eta(\omega) \in B\} \in \mathfrak{M}_{s,z} \cap \{x(z) = \beta\}$ и $A \in \mathfrak{M}_{z,\infty}$, в силу марковского свойства последняя величина равна *

$$\mu\{B \times A\} = \frac{1}{q} P_{s,\alpha}\{\Omega_{nk}, \ \eta(\omega) \in B\} \cdot P_{z,\beta}\{A\}. \tag{6.26}$$

Полагая в (6.26) поочередно $B = I$, $A = \Omega$, будем иметь

$$P_{z,\beta}\{A\} = \mu\{I \times A\} = \mu_2\{A\},$$

$$\frac{1}{q} P_{s,\alpha}\{\Omega_{nk}, \ \eta(\omega) \in B\} = \mu\{B \times \Omega\} = \mu_1\{B\}, \tag{6.27}$$

откуда

$$\mu\{B \times A\} = \mu_1\{B\} \cdot \mu_2\{A\}, \quad B \in \mathfrak{B}_{z,\infty}, \ A \in \mathfrak{M}_{z,\infty}. \tag{6.28}$$

Из теории меры известно, что при выполнении (6.28) мера μ на $\mathfrak{B}_{z,\infty} \times \mathfrak{M}_{z,\infty}$ совпадает с прямым произведением меры μ_1 на $\mathfrak{B}_{z,\infty}$ и меры μ_2 на $\mathfrak{M}_{z,\infty}$, так что для определения μ-меры любого множества из $\mathfrak{B}_{z,\infty} \times \mathfrak{M}_{z,\infty}$ можно применять теорему Фубини. Согласно определению T и μ

$$P_{s,\alpha}\{\Omega_{nk}, \ x(\eta) = \gamma\} = q\mu\{T\{\Omega_{nk}, \ x(\eta) = \gamma\}\} =$$

$$= q\mu\{u = \eta(\omega), \ x(u, \omega) = \gamma\} = q\mu\{u \geqslant z, \ x(u, \omega) = \gamma\}, \tag{6.29}$$

так как $\eta(\omega) \geqslant z$ на Ω_{nk}. Заметим теперь, что в силу измеримости процесса (см. определение 3) $\{u \geqslant z, \ x(u, \omega) = \gamma\} \in \mathfrak{B}_{z,\infty} \times \mathfrak{M}_{z,\infty}$. По теореме Фу-

* В определении марковского процесса мы требовали выполнения применяемого здесь марковского свойства только для множества из $\mathfrak{M}_{z,\infty}$ вида $\{x(u) \in \Gamma\}$. Нетрудно показать [6], что (2.3) остается в силе при замене $\{x(u) \in \Gamma\}$ любым множеством из $\mathfrak{M}_{t,\infty}$ [при этом нужно брать в (2.3) подинтегральную функцию $P_{t,x(t)}$].

бини получаем, используя (6.27),

$$q\mu\{u \geqslant z,\ x(u,\ \omega) = \gamma\} = q\int_z^\infty \mu_2\{x(u,\ \omega) = \gamma\}\,\mu_1\{du\} = q\int_z^\infty P_{z,\,\beta}\{x(u,\ \omega) =$$

$$= \gamma\}\,\mu_1\{du\} = q\int_z^\infty p_\beta^\gamma(u - z)\,\mu_1\{du\} = \int_{\Omega_{nk}} p_\beta^\gamma(\eta - t_n^k)\,dP_{s,\,\alpha}. \qquad (6.30)$$

Ясно, что если $P_{s,\,\alpha}\{\Omega_{nk}\} = 0$, то соответствующее слагаемое из (6.22) тоже можно записать в полученном сейчас виде. Положим для $\omega \in \Omega_\tau^\beta$

$$\tau_n(\omega) = t_n^k \quad \text{при} \quad t_n^{k-1} \leqslant \tau < t_n^k,\ k = 1, 2, \ldots\ (n = 1, 2, \ldots). \qquad (6.31)$$

Тогда, используя полученные сейчас выражения для каждого из членов ряда в (6.22), а также (6.12), можно переписать (6.22) в виде

$$P_{s,\,\alpha}\{\Omega_\tau^\beta,\ x(\eta) = \gamma\} = \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega_\tau^\beta - \Lambda_n} p_\beta^\gamma(\eta - \tau_n)\,dP_{s,\,\alpha}. \qquad (6.32)$$

Поскольку 1) функция $p_\beta^\gamma(t)$ непрерывна и ограниченна, 2) согласно (6.13) $P_{s,\,\alpha}\{\Lambda_n\}$ при $n\to\infty$ стремится к нулю, 3) $\tau_n \to \tau$ $(\omega \in \Omega_\tau^\beta)$ при $n\to\infty$, то величина в правой части (6.32) равна величине в правой части (6.8). Теорема доказана.

Хотя почти строго марковский процесс и «хуже» просто строго марковского процесса, но иногда и его может быть достаточно для тех или иных приложений. Например, в [14] свойство почти строгой марковости применяется к изучению свойств дифференцируемости переходных вероятностей $p_\alpha^\beta(t)$ однородного стохастически непрерывного марковского процесса со счетным числом состояний. Путем рассмотрения момента первого выхода из начального состояния и момента первого попадания в конечное состояние там доказывается, что функция $p_\alpha^\beta(t)$, $(t \geqslant 0)$ имеет непрерывную производную (в нуле берется правая производная), если $p_\alpha^\alpha(t)$ или $p_\beta^\beta(t)$ имеет в нуле конечную правую производную (существование конечной или бесконечной правой производной $p_\alpha^\alpha(t)$ в нуле доказано А. Н. Колмогоровым в [10]). Этот результат получен также Остином в [1] другим методом *. Далее, в [14] с использованием строгой марковости строится пример, в котором $p_1^2(t)$ при некотором $t > 0$ не имеет конечной второй производной **.

Поступила в редакцию
13. 2. 57

---

* Примечание при корректуре. Дифференцируемость $p_\alpha^\beta(t)$ при условии, что $p_\alpha^\alpha(t)$ имеет в нуле конечную производную, доказана также Чжуном (K. L. Chung, Some new developments in Markov chains, TAMS, 81, № 1, 195—210 (1956)), методом, близким к тому, который применен в [14].

** В [1] неверно сказано, будто в [14] построен пример, в котором нет первой производной при $t > 0$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] D. C. Austin, On the existence of the derivative of Markoff transition probability functions, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 41 (1955), 224—226.
[2] W. Doeblin, Sur certains mouvements aléatoires discontinus, Scand. Aktuarietidskr., 22 (1939), 211—222.
[3] Р. Л. Добрушин, Условия регулярности марковских процессов с конечным числом возможных состояний, Матем. сб., 34 (76) (1954), 541—556.
[4] J. L. Doob, Markoff chains, denumerable case, TAMS, 58 (1945), 455—473.
[5] Дж. Л. Дуб, Вероятностные процессы, М., 1956.
[6] Е. Б. Дынкин, Неоднородные строго марковские процессы, ДАН СССР, 113, № 2 (1957), 261—263.
[7] Е. Б. Дынкин и А. А. Юшкевич, Строго марковские процессы, Теория вероятн. и ее применение, I, вып. 1 (1956) 149—155.
[8] J. K. Kinney, Continuity properties of sample functions of Markov processes, TAMS, 74 (1953), 280—302.
[9] А. Н. Колмогоров. Основные понятия теории вероятностей, М., 1936.
[10] А. Н. Колмогоров, К вопросу о дифференцируемости переходных вероятностей в однородных по времени процессах Маркова со счетным числом состояний, Ученые записки МГУ, 4 (1951), 148—153.
[11] D. Ray, Stationary Markov processes with continuous paths, TAMS, 82, № 2, (1956), 452—493.
[12] П. Халмош, Теория меры, М., 1953.
[13] G. A. Hunt, Some theorems concerning brownian motion, Trans. Amer. Math. Soc., 81, 2 (1956), 294—319.
[14] А. А. Юшкевич, О дифференцируемости переходных вероятностей однородного марковского процесса со счетным числом состояний, Ученые записки МГУ, 9, вып. 186.

ON STRONG MARKOV PROCESSES

A. A. YUSHKEVIČ (MOSCOW)

(*Summary*)

The problem of constructing a strong Markov process with a given measurable Markov transition function $p(s, x, t, \Gamma)$ is considered. The space X of possible states is supposed to be given together with the function $p(s, x, t, \Gamma)$.

If it is required that the sample functions $x(t, \omega)$ be defined for each ω at all $t \in [0, \infty)$, then as shown by the examples described, the three following types of measurable transition functions exist:

1) every Markov process with a given transition function is a strong Markov process; 2) there are both strong Markov processes, and measurable not strong Markov processes with a given transition function; 3) there are no strong Markov processes with a given transition function. To avoid the third case, it is important to know, if there exists a process with a given transition function whose sample functions are continuous from the right. Under some general assumptions about space X, a process with such sample functions exists if for each $s \geqslant 0$ and $\varepsilon > 0$ uniformly in $x \in X$

$$\lim_{t \to s} p(u, x, t, V_\varepsilon(x)) = 1, \quad s \leqslant u \leqslant t, \tag{I}$$

where $V_\varepsilon(x)$ is the ε-neighbourhood of the point x.

For the discrete topology, every Markov process with sample functions continuous

from the right is a strong Markov process. If for each $s \geqslant 0$ uniformly in $x \in X$

$$\lim_{t \downarrow s} p(s, x, t, x) = 1, \tag{II}$$

then the sample functions of the process can be assumed to be continuous from the right in the discrete topology. For the case of a finite number of states, condition (II) is also necessary for continuity of the sample functions from the right.

If it is not required that the sample functions $x(t, \omega)$ be defined for each ω at all t, then in all known examples of measurable transition functions of type (3), one can obtain the strong Markov property, which is now defined in accordance with the new character of the sample functions. This can be done for every transition function of a time-homogeneous process with a denumerable number of states for which the condition (II) is true (without uniformity in x).

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том II И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ *Выпуск 2*
1957

ЛОКАЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ

ВОЛЬФГАНГ РИХТЕР

§ 1. Введение

Пусть дана последовательность независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ Их функции распределения обозначим $V_1(x), V_2(x), \ldots$ Предположим, что существуют все дисперсии $\mathbf{D}X_j = \sigma_j^2$, $s_n^2 = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2$. Без ограничения общности можно считать, что математическое ожидание величины X_j равно нулю, $\mathbf{E}X_j = 0$; $j = 1, 2 \ldots$. Введем в рассмотрение производящие функции моментов X_j:

$$M_j(z) = \mathbf{E}\, e^{zX_j} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{zy}\, dV_j(y). \tag{1}$$

Положим

$$Z_n = \frac{\sum_{j=1}^{n} X_j}{s_n}. \tag{2}$$

Одна из важных задач теории вероятностей состоит в изучении предельного поведения функции $\mathbf{P}\{Z_n < x\} = F_n(x)$ или соответствующих локальных функций распределения нормированных сумм Z_n при $n \to \infty$. Классическая формулировка проблемы ограничивается случаем $x = O(1)$ при $n \to \infty$. Но иногда, особенно в приложениях к математической статистике, возникают задачи, связанные с изучением асимптотического поведения вероятностей нормированных сумм, где x вместе с n неограниченно растет. В этом случае так называемых больших уклонений имеется пока крайне мало результатов. Локальные и интегральные теоремы, установленные при предположении $x = O(1)$ при $n \to \infty$, дают в этом случае только тривиальный ответ. Кроме некоторых результатов А. Я. Хинчина и Н. В. Смирнова, касающихся схемы Бернулли, в общем случае имеется несколько интегральных теорем, в известной степени решающих проблему больших уклонений.

Г. Крамер [1] доказал теорему, в которой оценивается отношение «хвостов» распределений $\frac{1 - F_n(x)}{1 - \Phi(x)}$ ($\Phi(x)$ — нормальная функция распре-

(еления) в случае одинаково распределенных величин в предположении $x = o\left(\frac{\sqrt{n}}{\ln n}\right)$. В работе В. Феллера [3] дана, в обобщение результатов Крамера, одна теорема для неодинаково распределенных величин в случае, когда $|X_j|$ имеет верхнюю границу вида $o(s_j)$. Следующий шаг сделан в 1953 г. В. В. Петровым [5], [6]. Ему удалось полностью обобщить теорему Крамера на неодинаково распределенные величины, притом улучшить остаточный член и заменить порядок роста $x = o\left(\frac{\sqrt{n}}{\ln n}\right)$ на $x = o(\sqrt{n})$.

В предлагаемой работе дается ряд локальных теорем, в известной мере решающих проблему больших уклонений, причем результаты аналогичны уже известным в интегральных теоремах. Метод доказательства — метод перевала из теории функций комплексного переменного —, казалось бы, никакого отношения к ранее использованным методам не имеет. Но это в действительности не так. Во всех упомянутых выше работах предполагается, что $\int_{-\infty}^{\infty} e^{hy}\, dV_j(y)$ сходятся для всех вещественных чисел h из некоторого, фиксированного для всех $j = 1, 2, \ldots$, интервала вокруг нуля. А это означает, что предполагается аналитичность производящих функций моментов X_j в некоторой общей для всех X_j полосе $|\Re e\, z| < A$. Далее, в указанных выше работах применяется некоторое преобразование данных вероятностных законов, которое, в сущности, сводится к введению «сопряженных» распределений вероятностей (по А. Я. Хинчину [8]). Но именно это преобразование есть скрытое применение метода перевала. Это выясняется в нижеследующих доказательствах наших теорем. Наши доказательства, по своей структуре, аналогичны доказательству теоремы Крамера. В них, однако, последовательно применяется метод перевала.

Г. Даньельс [2] указал на возможное значение этого метода для получения асимптотических выражений в теории вероятностей и математической статистике. Им же этим методом получено асимптотическое выражение для плотности арифметического среднего одинаково распределенных независимых случайных величин при условии $x = O(1)$ $(n \to \infty)$.

§ 2. Результаты

Налагаем на заданную последовательность $X_1, X_2, \ldots$ следующие условия:

Условие А. Существуют положительные числа A, K и k такие, что в круге $|z| < A$ имеют место неравенства

$$k \leqslant \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{zy}\, dV_j(y) \right| \leqslant K; \quad j = 1, 2, \ldots,$$

Условие В. При всех n

$$\frac{s_n^2}{n} \geqslant \delta > 0.$$

Условие С. В последовательности $\{X_j\}\,(j=1, 2, \ldots)$ существует подпоследовательность $X_{j_1}, X_{j_2}, \ldots$ с достаточно большим количеством членов из каждого отрезка $X_1, \ldots, X_n$ данной последовательности и такая, что для производящих функций моментов имеет место равномерная оценка

$$(C) \qquad \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{(v+it)y}\, dV_{j_k}(y) \right| \leqslant \frac{L}{|t|^{\beta}}$$

для $|t| \geqslant N$ и $|v| < A$, где $L, N > 0$ и $\beta > 0$ могут зависеть от v. Число n^* членов X_{j_k} среди первых n величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ удовлетворяет неравенству

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{n^*}{s_n^{\gamma}} > 0$$

для некоторого $\gamma > 0$.

В этих предположениях получается следующий результат:

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* $(A)-(C)$. *Тогда для всех достаточно больших* n *существует плотность* $p_{z_n}(x)$ *величины* Z_n. *Пусть, далее,* x *действительное число, зависящее от* n *и такое, что* $x > 1$, $x = o(\sqrt{n})$ *при* $n \to \infty$. *Тогда*

$$\frac{p_{z_n}(x)}{\varphi(x)} = e^{\frac{x^3}{\sqrt{n}}\lambda_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)}\left[1 + O\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right],$$

где $\lambda_n(t)$ степенной ряд, сходящийся при достаточно малых значениях $|t|$ равномерно для всех n, $\varphi(x)$ — нормальная плотность распределения.

Замечание. Равномерная оценка (C) в условии C выполняется, если, например, функции распределения величин X_{j_k} являются абсолютно непрерывными функциями и их производные $p_{j_k}(x)$, равно как и функции $e^{vx}p_{j_k}(x)\,(-A < v < A)$, имеют равномерно (для каждого отдельного v) ограниченные полные вариации, т. е. если последовательность $\int_{-\infty}^{\infty} e^{vx}\,|dp_{j_k}(x)|$ равномерно ограничена для каждого v, $|v| < A$.

Если величины $X_1, X_2, \ldots$ одинаково распределены, то можно значительно смягчить условие С. Имеет место

Теорема 2. *Пусть независимые величины* $X_1, X_2, \ldots$ *с общей функцией распределения* $V(x)$, $\mathbf{E}\,X_j = 0$, $\mathbf{D}\,X_j = \sigma^2 > 0$; $j = 1, 2, \ldots$, *подчиняются следующим условиям:*

Условие 1. *Существует положительное* A *такое, что для любого вещественного числа* $s\,(|s| < A)$ *сходится интеграл* $\int_{-\infty}^{\infty} e^{sy}\, dV(y)$.

Условие 2. *Существует такое* n_0, *что функция распределения суммы* $X_1 + \ldots + X_{n_0}$ *абсолютно непрерывна и ее производная ограничена.*

Тогда, если $x > 1$ *и* $x = o(\sqrt{n})$, *имеем при* $n \to \infty$

$$\frac{p_{z_n}(x)}{\varphi(x)} = e^{\frac{x^3}{\sqrt{n}}\lambda\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)}\left[1 + O\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right],$$

где $\lambda(t)$*—степенной ряд, сходящийся при достаточно малых значениях* $|t|$.

Вполне аналогично этому имеет место локальная теорема и для одинаково распределенных решетчатых слагаемых $X_1, X_2, \ldots$ с максимальным шагом распределения h.

Имеет место

Теорема 3. *Дана последовательность* $X_1, X_2, \ldots$ *независимых случайных величин,* $\mathbf{E}X_j = 0$, $\mathbf{D}X_j = \sigma^2 > 0$, *которые принимают только значения из некоторой арифметической прогрессии с вероятностями* $p_k = \mathbf{P}\{X_j = a + kh\}$, h *— максимальный шаг распределения,* k *— целое число,* a *— некоторое фиксированное действительное число. Положим* $P_n(k) = \mathbf{P}\left\{\sum_1^n X_j = an + kh\right\}$.

Пусть последовательность $X_1, X_2, \ldots$ *подчиняется условию 1 теоремы 2. Если положить* $x = x_{nk} = \frac{an + kh}{\sigma\sqrt{n}}$, *то для* $x > 1$, $x = o(\sqrt{n})$ *при* $n \to \infty$,

$$\frac{\frac{\sigma\sqrt{n}}{h} P_n(k)}{\varphi(x)} = e^{\frac{x^3}{\sqrt{n}}\lambda\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)}\left[1 + O\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right],$$

где $\lambda(t)$ *степенной ряд, сходящийся при достаточно малых значениях* $|t|$.

Замечание. Для случая схемы Бернулли, т. е. если X_k принимают значения $-p$, q ($p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$, $p + q = 1$) с вероятностями $p_0 = \mathbf{P}\{X_k = -p\} = q$, $p_1 = \mathbf{P}\{X_k = q\} = p$, имеется давно известный результат, полученный А. Я. Хинчиным [7] в 1929 г. простым применением формулы Стирлинга. Имеет место следующее:

Если $n \to \infty$ и k меняется так, что $1 < x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = o(\sqrt{n})$, то

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi pqn}} e^{-f\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) + O\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)},$$

где

$$f(t) = n\sum_{k=2}^{\infty} \frac{p^{k-1} - (-q)^{k-1}}{k(k-1)(pq)^{k/2-1}} t^k = n\left[\frac{t^2}{2} + \frac{p-q}{6\sqrt{pq}} t^3 + \frac{p^3 + q^3}{12\,pq} t^4 + \ldots\right],$$

что соответствует нашему результату.

Те же самые асимптотические выражения имеют место для отрицательных значений аргумента x, если допустить $x < -1$ и $|x| = o(\sqrt{n})$ при $n \to \infty$. Достаточно заменить в остаточном члене в предельных отношениях теорем 1—3 x на $|x|$.

Следует еще отметить, что появляющийся в теоремах 1—3 ряд $\lambda(t)$, соотв. $\lambda_n(t)$, тот же, что и в работах Крамера [1], Петрова [5].

§ 3. Некоторые следствия из теорем 1—3

Из теорем 1—3 вытекает ряд простых следствий. Формулируем для теоремы 1 наиболее интересные из них.

Следствие 1. В предположениях теоремы 1 имеем:

(а) если $x > 1$, $x = O(n^{1/6})$ при $n \to \infty$, то

$$\frac{p_{z_n}(x)}{\varphi(x)} = e^{cn^{x^3}}\left[1 + O\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right],$$

где $c_n = \frac{1}{6s_n^3}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{3_j}$ (α_{3_j} — третий момент величины X_j) имеет порядок $c_n = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ при $n \to \infty$.

(b) если $x > 0$, $x = o(n^{1/6})$ при $n \to \infty$, то

$$\lim_{n\to\infty} p_{z_n}(x) = \varphi(x).$$

Следствие 2. Из самого доказательства теоремы 1 следует, что здесь тоже имеет место аналог теоремы 2 В. В. Петрова [5]. Единственное требование это то, что $\frac{x}{\sqrt{n}}$ при больших n по модулю остается меньше некоторой величины $\varepsilon_0 > 0$. Подобрав такую постоянную ε_0, мы можем утверждать, что в интервале $1 < x < \varepsilon_0\sqrt{n}$ имеет место

$$\frac{p_{z_n}(x)}{\varphi(x)} = e^{\frac{x^3}{\sqrt{n}}\lambda_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)}[1 + r\varepsilon_0],$$

где $|r|$ меньше некоторой постоянной величины d.

§ 4. Доказательство теоремы 2

Путь доказательства для всех трех теорем почти один и тот же; впрочем, для каждой теоремы есть некоторые особенности, связанные с различной природой данных случайных величин. Выясним суть метода на примере доказательства теоремы 2.

Перейдем к доказательству теоремы 2. Как известно, условие 1 равносильно аналитичности производящей функции моментов $M(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{zx}\,dV(x)$ в некоторой полосе $|\Re e\, z| < A$. Так как $M(0) = 1$, то можно найти положительные числа k и $A_1 \leqslant A$ такие, что $|M(z)| \geqslant k > 0$ в круге $|z| \leqslant A_1$. Тогда можно образовать $K(z) = \ln M(z)$ и брать в качестве логарифма его главное значение, стремящееся к нулю при $z \to 0$.

В силу аналитичности $K(z)$ в круге $|z| \leqslant A_1$ функцию $K(z)$ можно разложить в степенной ряд, равномерно сходящийся в этом круге. Очевидно

$$K(z) = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{\gamma_k z^k}{k!} = \frac{\sigma^2 z^2}{2} + \frac{\gamma_3 z^3}{3!} + \ldots \tag{1}$$

и

$$K'(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\gamma_{k-1} z^k}{k!} = \sigma^2 z + \gamma_3\frac{z^2}{2} = \ldots, \tag{2}$$

где γ_k обозначает семиинвариант k-го порядка величины X_j ($j = 1, 2, \ldots$).

Производящая функция моментов $M_n(z)$ суммы первых n величин $X_1, \ldots, X_n$ равна, как известно, произведению производящих функций моментов слагаемых: $M_n(z) = [M(z)]^n$. Но нужно установить условия для наличия формулы обращения для $M_n(z)$.

Для этого мы будем опираться на следующую теорему о преобразованиях Фурье (см. [4], стр. 20, или Б. В. Гнеденко, Курс теории вероятностей, 1955, стр. 238):

Если функция $g(x)$ абсолютно интегрируема ($g \in L_1(-\infty, +\infty)$), непрерывна и ограничена, а ее преобразование Фурье $h(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} g(x)\, dx$ неотрицательно, то и $h \in L_1(-\infty, +\infty)$.

При помощи некоторых простых соображений из этой теоремы можно получить следующую лемму:

Лемма. *Если* $g \in L_1(-\infty, +\infty)$ *и* $e^{cx} g \in L_1(-\infty, +\infty)$ *для всех* $c\,(|c| < A)$, *и если* $g(x)$ *и* $e^{cx} g(x)$ *ограничены, то квадрат производящей функции* $M_g(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{zx} g(x)\, dx$ $(|\operatorname{Re} z| < A)$ *абсолютно интегрируем вдоль каждой вертикальной прямой* $z = c + iy$ $(|c| < A)$:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |M^2(c + iy)|\, dy < +\infty.$$

Для доказательства образуем вспомогательную функцию $\Psi_c(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x + y)\, e^{c(x+y)}\, g(y)\, e^{cy} dy$, где c—какое-либо фиксированное число из интервала $(-A, A)$. Функция $\Psi_c(x)$ абсолютно интегрируема, ограничена и непрерывна на $(-\infty, +\infty)$. Применим формулированную выше теорему к этой функции $\Psi_c(x)$. Это возможно, потому что преобразование Фурье функции $\Psi_c(x)$ в действительности неотрицательно:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \Psi_c(x)\, dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(y)\, e^{cy}\, dy \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} e^{c(x+y)}\, g(x + y)\, dx =$$

$$= M(c - it)\, M(c + it) = |M(c + it)|^2 \geqslant 0.$$

Согласно теореме имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |M(c + it)|^2\, dt < +\infty.$$

При этом $c\,(|c| < A)$ было произвольно, что заканчивает доказательство.

По условию 2 теоремы 2 существует такое натуральное число n_0, что функция распределения суммы $\sum\limits_{j=1}^{n_0} X_j$ абсолютно непрерывна. Ее производная — обозначим ее через $g(x)$ — ограничена. Согласно условию 1 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{cx} g(x)\, dx < +\infty$ для всех c из $(-A, A)$ и $e^{cx} g(x)$ ограничены. Применение леммы дает нам формулу обращения для всех $n \geqslant 2n_0$:

$$p_{z_n}(x) = \frac{\sigma \sqrt{n}}{2\pi i} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} M^n(z)\, e^{-\sigma \sqrt{n} zx}\, dz \qquad (3)$$

и

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} |M^{2n_0}(z)|\,dz < +\infty$$

для всех c из $(-A, A)$. Мы учитываем при этом, что $p_{z_n}(x) = \sigma\sqrt{n}g(\sigma\sqrt{n}x)$.

Перейдем к вычислению интеграла 3 в предположениях теоремы 2. Число $c \in (-A, A)$ пока произвольно. Постараемся выбрать его возможно удобнее.

С этой целью рассмотрим интеграл

$$I = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} M^n(z)\, e^{-n\sigma\tau z}\, dz.$$

Мы можем применить метод перевала по меньшей мере для $|\operatorname{Re} z| < A_1$. Для нахождения точки перевала z_0 данной задачи нужно разыскать решения z_0 уравнения:

$$\frac{d}{dz}[K(z) - \sigma\tau z] = K'(z) - \sigma\tau = 0$$

или

$$\tau = \sigma z + \frac{\gamma_3 z^2}{2\sigma} + \frac{\gamma_4 z^3}{3!\sigma} + \ldots \tag{4}$$

Так как $\sigma > 0$, можно обратить этот степенной ряд для достаточно малых $|\tau|$, причем единственным образом. Полученный ряд, выражающий z как функцию от τ, абсолютно сходится для малых τ и стремится к нулю при $\tau \to 0$. Решение z_0 уравнения (4) имеет тот же знак, что и τ. В нашем случае, τ и z_0 положительны. Получаем

$$z_0 = \frac{\tau}{\sigma} - \frac{\gamma_3}{2\sigma^4}\tau^2 + \frac{3\gamma_3^2 - \gamma_4\sigma^2}{6\sigma^7}\tau^3 + \ldots \tag{5}$$

В качестве контура перевала можно взять вертикальную прямую $z = z_0 + it$ $(-\infty < t < +\infty)$. Вдоль прямой $z = z_0 + it$ можно разложить $K(z) - z\tau\sigma$ по степеням t в окрестности $t = 0$:

$$K(z) - z\tau\sigma = K(z_0) - z_0\tau\sigma + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{K^{(j)}(z_0)(it)^j}{j!}. \tag{6}$$

Вычисляем непосредственно:

$$K(z_0) - z_0\tau\sigma = K(z_0) - z_0 K'(z_0) = -\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k-1}{k}\gamma_k z_0^k = -\frac{\tau^2}{2} + \tau^3\lambda(\tau),$$

где

$$\lambda(\tau) = \frac{\gamma_3}{6\sigma^3} + \frac{\gamma_4\sigma^2 - 3\gamma_3^2}{24\sigma^6}\tau + \ldots \tag{7}$$

абсолютно сходится в некоторой окрестности точки $\tau = 0$.

Пусть $\varepsilon > 0$ число, меньшее радиуса сходимости ряда (6). По методу перевала главная часть интеграла I получается интегрированием вдоль сколь угодно малого отрезка на контуре перевала вблизи точки перевала z_0. Поэтому можно написать:

$$I = \int_{z_0-i\varepsilon}^{z_0+i\varepsilon} M^n(z)\, e^{-n\sigma\tau z}\, dz + R. \tag{8}$$

Найдем сначала оценку для модуля величины

$$R = \int_{z_0-i\infty}^{z_0-i\varepsilon} M^n(z)\, e^{-n\sigma\tau z} dz + \int_{z_0+i\varepsilon}^{z_0+i\infty} M^n(z)\, e^{-n\sigma\tau z} dz.$$

$M^n(z)$ для $n \geqslant 2n_0$ является производящей функцией моментов абсолютно непрерывной функции распределения. Значит, на каждой прямой $z = c + it\ (-\infty < t < +\infty,\ c \in (-A, A))$ модуль $|M^n(z)|$ стремится к нулю, если $|t| \to \infty$. Существует, следовательно, такое положительное $\alpha = \alpha(z_0)$, что при $|t| \geqslant \varepsilon$

$$|M^{2n_0}(z_0 + it)| < e^{-\alpha} M^{2n_0}(z_0) = e^{-\alpha + 2n_0 K(z_0)}.$$

Для $n \geqslant 2n_0$ получаем

$$\left|\frac{\sigma\sqrt{n}}{2\pi i} R\right| < \exp\{-n\sigma\tau z_0 + nK(z_0)\} \frac{\sigma\sqrt{n}}{2\pi} \exp\left\{-\alpha\left(\left[\frac{n}{2n_0}\right] - 1\right)\right\} \cdot L_1,$$

где $L_1 = e^{-2n_0 K(z_0)} \int_{z_0-i\infty}^{z_0+i\infty} |M(z)|^{2n_0} dz < +\infty$ ограничено сверху числом, независящим от n и z_0. Тогда

$$\left|\frac{\sigma\sqrt{n}}{2\pi} R\right| = \exp\{-n\sigma\tau z_0 + nK(z_0)\}\, o(n^{-m}), \tag{9}$$

где m сколь угодно велико, при $n \to \infty$.

Теперь приступаем к оценке главной части интеграла I. Мы имеем

$$I_1 = \int_{z_0-i\varepsilon}^{z_0+i\varepsilon} \exp\{n[K(z) - \sigma\tau z]\}\, dz \tag{10}$$

и в силу (6)

$$I_1 = i \exp\{n[K(z_0) - z_0\tau z]\} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \exp\left\{n \sum_{k=2}^{\infty} \frac{K^{(k)}(z_0)\,(it)^k}{k!}\right\} dt.$$

Для всех (действительных) z_0, $(|z_0| < A_1)$, функция $K''(z)$ положительна:

$$0 < \frac{1}{M(z_0)} \int_{-\infty}^{\infty} \left(y - \frac{M'(z_0)}{M(z_0)}\right)^2 e^{yz} dV(y) =$$

$$= \frac{1}{M(z_0)} \left[\int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{yz} dV(y) - \frac{M'(z_0)}{M(z_0)} \int_{-\infty}^{\infty} y e^{yz} dV(y)\right] = \frac{M''(z_0)\, M(z_0) - M'^2(z_0)}{M^2(z_0)} = K''(z_0).$$

Поэтому законно делать следующую замену переменных: $t' = \sqrt{nK''(z)}\,t$. Мы имеем

$$I_1 = \frac{ie^{n\{K(z_0)-z_0\tau\sigma\}}}{\sqrt{nK''(z_0)}} \int\limits_{-\varepsilon\sqrt{nK''(z_0)}}^{+\varepsilon\sqrt{nK''(z_0)}} e^{-\frac{t^2}{2}} \exp\left\{\sum_{j=3}^{\infty} \frac{\rho_j(z_0)(it)^j}{j!\, n^{j/2-1}}\right\} dt,$$

где

$$\rho_j(z) = \frac{K^{(j)}(z)}{[K''(z)]^{j/2}}.$$

Вычисляем

$$\exp\left\{\sum_{j=3}^{\infty} \frac{\rho_j(z_0)(it)^j}{j!\, n^{j/2-1}}\right\} = 1 - \frac{i\rho_3 t^3}{3!\sqrt{n}} - \left\{\frac{\rho_3^2 t^6}{(3!)^2} - \frac{\rho_4 t^4}{4!}\right\}\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right). \tag{11}$$

Тогда получаем

$$I_1 = \frac{ie^{n\{K(z_0)-z_0\tau\sigma\}}}{\sqrt{nK''(z_0)}}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\left\{1 - \frac{i\rho_3 t^3}{3!\sqrt{n}} - \left[\frac{\rho_3^2 t^6}{(3!)^2} - \frac{\rho_4 t^4}{4!}\right]\frac{1}{n} + \ldots\right\} dt + R_1\right].$$

Ошибка R_1, совершаемая нами при замене конечных границ интегрирования бесконечными, имеет порядок $o\left(\frac{1}{n}\right)$ при $n \to \infty$.

Проинтегрировав I_1, получаем следующее выражение:

$$I_1 = \frac{i\sqrt{2\pi}e^{n\{K(z_0)-z_0\tau\sigma\}}}{\sqrt{nK''(z_0)}}\left[1 + \left\{\frac{\rho_4(z_0)}{9} - \frac{5}{12}\rho_3^2(z_0)\right\}\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Напишем это выражение, заменяя везде z_0 на его функцию от τ (5). Для этого оценим сначала

$$\frac{\sigma}{\sqrt{K''(z_0)}} = 1 - \frac{\gamma_3}{2\sigma^3}\tau + \frac{5\gamma_3^2 - 2\gamma_4\sigma^2}{8\sigma^6}\tau^2 + \ldots \tag{12}$$

$$\rho_4(z_0) = \frac{\gamma_4}{\sigma^4} + \frac{\gamma_5\sigma^2 - 2\gamma_3\gamma_4}{\sigma^7}\tau + \ldots \tag{13}$$

$$\rho_3^2(z_0) = \frac{\gamma_3^2}{\sigma^6} + \frac{2\gamma_3\gamma_4\sigma^2 - 3\gamma_3^2}{\sigma^9}\tau + \ldots \tag{14}$$

Таким образом, согласно (7), (12) — (14), при $\tau \to 0$, $n \to \infty$

$$I_1 = \frac{i\sqrt{2\pi}}{\sigma\sqrt{n}} e^{-\frac{n\tau^2}{2} + n\tau^2\lambda(\tau)}\left[1 - \frac{\gamma_3}{2\sigma^3}\tau + o(\tau) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right] \tag{15}$$

и, наконец, по (8), (9), (11) и (15)

$$\frac{\sigma\sqrt{n}}{2\pi i} I = \frac{e^{-\frac{n\tau^2}{2} + n\tau^2\lambda(\tau)}}{\sqrt{2\pi}}\left[1 - \frac{\gamma_3}{2\sigma^3}\tau + o(\tau) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Из этого соотношения уже легко извлечь утверждение теоремы. Положим $\tau = \frac{x}{\sqrt{n}}$ и наложим на x условие $x = o(\sqrt{n})$ при $n \to \infty$, $x > 1$. Тогда $\tau \to 0$ при $n \to \infty$, и мы получаем согласно (3)

$$p_{z_n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{\sqrt{n}}\lambda\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)}\left[1 + O\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right],$$

где $\lambda(t)$ определяется соотношением (7). Теорема 2 доказана.

§ 5. Доказательство теоремы 3

Доказательство теоремы 3 во многом аналогично доказательству теоремы 2. Но есть некоторые существенные различия, на которых мы сейчас остановимся.

Как в предыдущем доказательстве, существуют числа $k>0$ и $A_1\leqslant A$ такие, что $|M(z)|\geqslant k>0$ в круге $|z|\leqslant A_1$. В этом круге имеют место разложения (1) и (2) для $K(z)$ и $K'(z)$.

Величины $X_1, X_2, \ldots$ принимают значения $a+kh$ с вероятностями p_k. Тогда

$$M(z)=\mathbf{E}e^{zX_j}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}p_k e^{(a+kh)z}.$$

$M(z)$ аналитична в полосе $|\Re z|<A$ и периодична с периодом $\frac{2\pi i}{h}$, h — максимальный шаг распределения. Поэтому $M(z)$ принимает свое максимальное значение $M(v)$ на каждой вертикальной прямой $z=v+it$, $|v|<A$ только в точках $z=v+i\frac{2\pi k}{h}$. А это означает, что при данном v_0, $|v_0|<A$, для каждого $\varepsilon\left(0<\varepsilon<\frac{\pi}{h}\right)$, существует такое положительное α, что

$$|M(v_0+it)|<M(s_0)e^{-\alpha} \tag{16}$$

для $\varepsilon\leqslant|t|\leqslant\frac{\pi}{h}$.

Рассмотрим суммы $\overline{Z}_n=\sum_{j=1}^{n}X_j$. Величина $\overline{Z}_n$ принимает значения $an+kh$ с вероятностями $P_n(k)$. Поэтому производящая функция моментов величины $\overline{Z}_n$ равна

$$M^n(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}P_n(k)\,e^{z(an+kh)}.$$

Умножим это уравнение на $e^{-z(an+k_0h)}$ и проинтегрируем от $c-i\frac{\pi}{h}$ до $c+i\frac{\pi}{h}$ ($|c|<A$) вдоль прямой. Получим

$$P_n(k)=\frac{h}{2\pi i}\int_{c-i\frac{\pi}{h}}^{c+i\frac{\pi}{h}}M^n(z)\,e^{-z(an+k_0h)}\,dz.$$

$\frac{\sum_{k=1}^{n}X_k}{\sigma\sqrt{n}}$ принимает значения $x=x_{kn}=\frac{an+kh}{\sigma\sqrt{n}}$, т. е. $kh=\sigma\sqrt{n}x-an$. Поэтому мы можем написать

$$P_n(k)=\frac{h}{2\pi i}\int_{c-i\frac{\pi}{h}}^{c+i\frac{\pi}{h}}M^n(z)\,e^{-z\sigma\sqrt{n}x}\,dz. \tag{17}$$

Для вычисления этого интеграла в предположениях теоремы 3 положим $\frac{x}{\sqrt{n}} = \tau$ и воспользуемся методом перевала, предполагая $|c| < A_1$.

Получаем точку перевала (5) $z_0 = \frac{\tau}{\sigma} + \frac{\gamma_3 \tau^2}{2\sigma^4} + \ldots$. Контур интегрирования будет $z = z_0 + it$, $-i\frac{\pi}{h} \leqslant t \leqslant i\frac{\pi}{h}$. Главная часть интеграла,

$$\int_{z_0 - i\varepsilon}^{z_0 + i\varepsilon} M^n(z)\, e^{-z\sigma\tau n}\, dz,$$

совершенно такая же, как в предыдущем доказательстве ((10), (15)):

$$\int_{z_0 - i\varepsilon}^{z_0 + i\varepsilon} M^n(z)\, e^{-z\sigma\tau n}\, dz = \frac{i\sqrt{2\pi}}{\sigma\sqrt{n}}\, e^{-\frac{n\tau^2}{2} + n\tau^3\lambda(\tau)} \left[1 - \frac{\gamma_3}{2\sigma^3}\tau + o(\tau) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Оценка остаточного интеграла не затруднительна (16):

$$R = \left[\int_{z_0 - i\frac{\pi}{h}}^{z_0 - i\varepsilon} + \int_{z_0 + i\varepsilon}^{z_0 + i\frac{\pi}{h}}\right] M^n(z)\, e^{-n\sigma\tau z}\, dz,$$

$$|R| < \frac{2\pi}{h}\, e^{-n\sigma\tau z_0 + nK(z_0)} \cdot e^{-n\alpha} = e^{-n\sigma\tau z_0 + nK(z_0)} \cdot o(n^{-m}),$$

где m—любое большое положительное число. Поэтому при оценке нашего интеграла можно пренебречь R. Возвращаясь к постановке проблемы, положим $\tau = \frac{x}{\sqrt{n}}$, $x = o(\sqrt{n})$ при $n \to \infty$, $x > 1$. Тогда в силу (17)

$$P_n(k) = \frac{h}{\sigma\sqrt{n}} \cdot \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{x^3}{\sqrt{n}}\lambda\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)} \left[1 + O\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right],$$

что и требовалось доказать

§ 6. Доказательство теоремы 1

После разъяснения метода в доказательстве теоремы 2 уже нетрудно доказать теорему 1.

Условие A равносильно тому, что вторые производящие функции моментов $K_j(z) = \ln \int_{-\infty}^{\infty} e^{zx}\, dV_j(x)$ (ln — главное значение логарифма) аналитичны в одном и том же круге $|z| < A$ и что функции $K_j'(z)$ равномерно ограничены по модулю, например, в круге $|z| < A_1 = \frac{A}{2}$ (см. [6]).

Имеем

$$K_j(z) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\gamma_{kj}}{k!} z^k,$$

где γ_{kj} семиинвариант порядка k случайной величины X_j. Так как

$|K_j(z)| \leqslant B$ на окружности $|z| = A_2 < A_1$, то в силу неравенств Коши

$$|\gamma_{kj}| \leqslant \frac{B(k-1)!}{A_2^{k-1}}.$$

Тогда величины $\Gamma_{kn} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \gamma_{kj}$ тоже ограничены числом, не зависящим от n. Следовательно, $\sum_{j=1}^{n} K_j'(z) = n\sum_{k=2}^{\infty} \Gamma_{kn} \frac{z^{k-1}}{(k-1)!}$ мажорируется рядом, сходящимся при $|z| < A_2$, с коэффициентами, не зависящими от n.

По условию С для некоторого положительного μ и $n \geqslant n_1$ имеем

$$n^* > \mu s_n^{\gamma}.$$

Но $n^*\beta > \mu\beta s_n^{\gamma} \to \infty$, т. е. найдется такое $n_0 \geqslant n_1$, что $n^*\beta \geqslant 2$.

Для $|t| \geqslant N$ имеем $|M_{j_k}(c+it)| \leqslant \frac{L(c)}{|t|^{\beta}}$ и, следовательно,

$$\left|\prod_{j=1}^{n_0} M_j(c+it)\right| \leqslant \frac{L_1}{|t|^{n_0^*\beta}} \leqslant \frac{L_1}{t^2},$$

и сходится интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\prod_{j=1}^{n} M_j(c+it)\right| dt$$

для $n \geqslant n_0$, $|c| < A_2$.

Поэтому имеет место формула обращения

$$p_{z_n}(x) = \frac{s_n}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{-zxs_n}\prod_{j=1}^{n} M_j(z)\,dz \tag{18}$$

для всех $n \geqslant n_0$ независимо от специального выбора числа c из интервала $(-A_2, A_2)$.

Положим $\frac{x}{\sqrt{n}} = \tau$ и вычислим интеграл

$$I = \frac{s_n}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{-z\tau_n\sqrt{n}}\prod_{j=1}^{n} M_j(z)\,dz \tag{19}$$

при помощи метода перевала.

Дифференцируя выражение

$$-\frac{s_n}{\sqrt{n}}\,z\tau + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} K_j(z)$$

по z и приравнивая результат нулю, найдем седловую точку нашей проблемы, как решение этого уравнения, если такое существует.

Получаем как уравнение

$$\sqrt{\frac{s_n^2}{n}}\,\tau = \sum_{k=2}^{\infty} \Gamma_{kn}\frac{z^{k-1}}{(k-1)!} = \frac{s_n^2}{n}\,z + \Gamma_{3n}\frac{z^2}{2} + \ldots \tag{20}$$

$|z|<A_2$. По условию B имеем $\frac{s_n^2}{n}\geqslant\delta>0$. Тогда можно единственным образом обратить ряд, выражая z как функцию от τ. Можно найти общую для всех n окрестность $\tau=0$, внутри которой новый ряд по модулю мажорируется рядом с коэффициентами, не зависящими от n, который там же сходится.

Обращая ряд (20), получаем

$$z=\frac{\tau}{\sqrt{\Gamma_{2n}}}-\frac{\Gamma_{3n}}{2\Gamma_{2n}^2}\tau^2+\frac{3\Gamma_{3n}^2-\Gamma_{4n}\Gamma_{2n}}{6\Gamma_{2n}^{5/2}}\tau^3+\ldots \qquad (21)$$

Можно найти такое $\varepsilon_0>0$, что этот ряд сходится абсолютно для всех $\tau\in(-\varepsilon_0,\varepsilon_0)$ и соответствующая сумма z ряда (21) лежит в интервале $(-A_2,A_2)$. Положительным τ отвечают положительные z. Зафиксируем достаточно малое τ. Пусть z_0 — соответствующая седловая точка — решение уравнения (20). Тогда и (19) берем $c=z_0$ и разлагаем интеграл на две части.

Выбираем $\varepsilon>0$ столь малое, чтобы круг $|z-z_0|\leqslant\varepsilon$ еще лежал внутри круга $|z|<A_2$. Можно написать

$$I=\frac{s_n}{2\pi i}\int\limits_{z_0-i\varepsilon}^{z_0+i\varepsilon}\exp\left\{n\left[-\sqrt{\frac{s_n^2}{n}}z\tau+\sum_{k=2}^{\infty}\Gamma_{kn}\frac{z^k}{k!}\right]\right\}dz+R.$$

R легко оценивается по модулю. Для любого $\varepsilon>0$ в силу оценки (C) существует такое $\alpha=\alpha(z_0)>0$, что для каждого члена подпоследовательности (X_{j_k}); $k=1,2,\ldots$

$$|M_{j_k}(z_0+it)|<e^{-\alpha}M_{j_k}(z_0)$$

для всех t ($|t|\geqslant\varepsilon$). Для всех j, конечно, имеет место оценка $|M_j(z_0+it)|\leqslant M_j(z_0)$. Следовательно,

$$|R|<\frac{s_n}{2\pi}e^{-\alpha n^*}\exp\left\{n\left[-\sqrt{\frac{s_n^2}{n}}z_0\tau+\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}K_j(z_0)\right]\right\}\cdot L,$$

где L — некоторое постоянное число (не зависящее от n), $n\geqslant n_0$, а для $n\geqslant n_0$ имеем $n^*>\mu s_n^{\gamma}$, т. е. $e^{-\alpha n^*}<e^{-\mu\alpha s_n^{\gamma}}$ и, тем более,

$$s_ne^{-\alpha n^*}<s_ne^{-\alpha\mu s_n^{\gamma}}\leqslant c_1\sqrt{n}\,e^{-c_2n^{\gamma/2}}=o(n^{-2}).$$

На отрезке $z=z_0+it$ ($|t|<\varepsilon$) можно разложить в ряд

$$-\sqrt{\frac{s_n^2}{n}}z\tau+\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}K_j(z)=-\tau z_0\sqrt{\frac{s_n^2}{n}}+\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}K_j(z_0)-$$

$$-\frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{n}K_j''(z_0)t^2-\frac{1}{6n}\sum_{j=1}^{n}K_j'''(z_0)it^3+\ldots \qquad (22)$$

При этом

$$-\frac{\tau z_0 s_n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}K_j(z_0)=-z_0\sum_{k=2}^{\infty}\Gamma_{kn}\frac{z_0^{k-1}}{(k-1)!}+\sum_{k=2}^{\infty}\Gamma_{kn}\frac{z_0^k}{k!}$$

$$=\sum_{k=2}^{\infty}\Gamma_{kn}\frac{1-k}{k!}z_0^k \qquad (23)$$

$$=-\frac{\tau^2}{2}+\tau^3\lambda_n(\tau),$$

где

$$\lambda_n(t)=\frac{\Gamma_{3n}}{6\Gamma_{2n}^{3/2}}-\frac{3\Gamma_{3n}^2-\Gamma_{4n}\Gamma_{2n}}{24\Gamma_{2n}^3}t+\ldots \qquad (24)$$

степенной ряд, сходящийся при достаточно малых $|t|$ равномерно для всех n.

Как в доказательстве теоремы 2, $K_j''(z_0)>0$ для $|z_0|<A_2$. Тогда то же самое можно утверждать о сумме $\sum_{j=1}^{n}K_j''(z_0)$. В силу условия B даже

$$\sum_{j=1}^{n}K_j''(z_0)=s_n^2\left(1+\frac{\Gamma_{3n}}{\Gamma_{2n}^{3/2}}\tau+o(\tau)\right)>n\delta\left(1-\frac{2|\Gamma_{3n}|}{\Gamma_{2n}^{3/2}}|\tau|\right)>n\delta\left(1-\frac{2S|\tau|}{\delta^{3/2}}\right),$$

где $|\Gamma_{3n}|<S$. Значит, для достаточно малых $|\tau|$, $|\tau|<\frac{\delta^{3/2}}{2S}$, $\sqrt{\sum_1^n K_j''(z_0)}$ стремится к бесконечности не медленнее, чем $\eta\sqrt{n}$, где $\eta>0$. Сделаем замену переменных $t'=\sqrt{\sum_1^n K_j''(z_0)}\,t$ в интеграле

$$I_1=\frac{s_n}{2\pi i}\int_{z_0-i\varepsilon}^{z_0+i\varepsilon}\exp\left\{n\left[-\frac{z\tau s_n}{\sqrt{n}}+\sum_{k=2}^{\infty}\Gamma_{kn}\frac{z^k}{k!}\right]\right\}dz.$$

Получаем в силу (22), (23)

$$I_1=\frac{s_n}{2\pi}e^{-\frac{n\tau^2}{2}+n\tau^3\lambda_n(\tau)}\frac{1}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}K_j''(z_0)}}\int_{-\varepsilon\sqrt{\sum_1^n K_j''(z_0)}}^{+\varepsilon\sqrt{\sum_1^n K_j''(z_0)}}e^{-\frac{t'^2}{2}}\times$$

$$\times\exp\left\{\sum_{m=3}^{\infty}\frac{\rho_{m,n}(z_0)}{n^{m/2-1}}\cdot\frac{(it')^m}{m!}\right\}dt',$$

Конечные границы интеграла можно заменить бесконечными, совершаемая ошибка порядка $o\left(\frac{1}{n}\right)$ при $n\to\infty$. Здесь обозначено

$$\rho_{m,n}(z_0) = \frac{n^{m/2-1}\sum_{j=1}^{n} K_j^{(m)}(z_0)}{\left[\sum_{j=1}^{n} K_j''(z_0)\right]^{m/2}}.$$

Вычисляем

$$\frac{s_n}{\sqrt{\sum_1^n K_j''(z_0)}} = 1 - \frac{\Gamma_{3n}}{2\Gamma_{2n}^{3/2}}\tau + o(\tau) \qquad (\tau \to 0)$$

и

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\left\{\sum_{m=3}^{\infty}\frac{\rho_{m,n}(z_0)}{n^{m/2-1}}\cdot\frac{(it)^m}{m!}\right\}dt = 1 + \left[\frac{\rho_{4,n}}{8} - \frac{5\rho_{3,n}^2}{12}\right]\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) =$$

$$= 1 + \left\{\frac{\Gamma_{4n}}{8\Gamma_{2n}^2} - \frac{5}{12}\cdot\frac{\Gamma_{3n}}{\Gamma_{2n}^3}\right\}\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (n \to \infty).$$

Окончательно получаем

$$I = I_n + R = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{n\tau^2}{2} + n\tau^3\lambda_n(\tau)\right\}\left[1 + O(\tau) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

для $\tau \to 0$, $n \to \infty$.

Отсюда уже легко получить утверждение теоремы. Положим $\tau = \frac{x}{\sqrt{n}}$ и подчиним x условию $x = o(\sqrt{n})$ при $n \to \infty$, $x > 1$. Тогда $\frac{x}{\sqrt{n}} \to 0$ при $n \to \infty$ и для достаточно большого n имеет место соотношение

$$p_{z_n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{\sqrt{n}}\lambda_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)}\left[1 + O\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right],$$

где $\lambda_n(t)$ определяется формулой (24). Теорема доказана.

В заключение хочу выразить благодарность чл.-корр. АН СССР Ю. В. Линнику за предложение данной задачи и ценные указания.

Поступила в редакцию
25. 12. 56

ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Cramér, Sur un nouveau théorème — limite de la théorie des probabilités, Actual. sci et ind., No. 736, Paris, 1938, [УМН, X (1944), 166—178)].

[2] H. E. Daniels, Saddlepoint approximations in statistics, Ann. Math. Statist., 25 (1954), 631—650.

[3] W. Feller, Generalisation of a probability theorem of Cramér, Trans. Amer. Math. Soc., 54 (1943), 361—372.

[4] S. Bochner and K. Chandrasekharan, Fourier transforms, Princeton, 1949.

[5] В. В. Петров, Обобщение предельной теоремы Крамера, УМН, 9, 4 (1954), 195—202.

[6] В. В. Петров, Распространение предельной теоремы Крамера на неодинаково распределенные независимые величины, Вестник Ленингр. ун-та, № 8, (1953), 13—25.

[7] A. Khintchine, Über einen neuen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Math. Annalen, 101 (1929), 745—752.

[8] А. Я. Хинчин, Математические основания статистической механики, М.—Л., 1943.

LOKALE GRENZWERTSÄTZE FÜR GROSSE ABWEICHUNGEN

WOLFGANG RICHTER (LENINGRAD)

(*Zusammenfassung*)

Sei (X_j), $j = 1, 2, \ldots$, eine Folge unabhängiger Zufallsgrößen mit den Verteilungsfunktionen $V_j(x)$. Es existiere $DX_j = \sigma_j^2$, $s_n^2 = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2$, $EX_j = 0$; $j = 1, 2, \ldots$. Wir setzen $Z_n = \sum_{j=1}^{n} X_j / s_n$.

Mit Hilfe der Sattelpunktmethode aus der Funktionentheorie werden einige lokal Grenzwertsätze ganz in Analogie zu den bisher bekannten Integralgrenzwertsätzen für große Abweichungen von H. Cramér [1] und W. Petrow [5] abgeleitet. Letztere betrachteten das Verhalten der Funktion $P\{Z_n < x\} = F_n(x)$ für $n \to \infty$, wobei aber x zugleich mit n gegen Unendlich strebt («große Abweichungen»). W. Petrow verallgemeinerte Cramérs Satz vom Fall gleichverteilter X_j auf den allgemeinen Fall und verbesserte zugleich das Restglied und das Wachstum von x. Daß ihre Beweismethode — die Einführung einer bestimmten Transformation der Verteilungsgesetze der X_j — ganz naturgemäß war, zeigt die vorliegende Arbeit, die die durch die Voraussetzung der Analytizität in einem Streifen $|\Re z| < A$ der Funktionen $M_j(z) = Ee^{zX_j} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{zy}\, dV_j(y)$ gegebenen Möglichkeiten der Funktionentheorie konsequent ausnutzt.

Satz 1. *Es seien die Bedingungen* A — C *erfüllt. Dann besitzt* Z_n *für genügend große* n *eine Verteilungsdichte* $p_{z_n}(x)$. *Es sei ferner* $x > 1$ *und* $x = o(\sqrt{n})$ *für* $n \to \infty$. *Dann gilt*

$$\frac{p_{z_n}(x)}{\varphi(x)} = e^{\frac{x}{\sqrt{n}}\lambda_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)}\left[1 + O\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right],$$

wobei $\lambda_n(t)$ *eine Potenzreihe ist, die für genügend kleine Werte* $|t|$ *gleichmäßig für alle* n *konvergiert,* $\varphi(x)$ *ist die Dichte der Normalverteilung.*

Für negative x gilt eine analoge Beziehung.

Bei gleichverteilten x_j läßt sich die Bedingung C wesentlich abschwächen. Es gilt in diesem Fall der Satz 2.

Auch im Falle gitterförmig verteilter Zufallsgrößen X_j gilt eine analoge Limesbeziehung (Satz 3).

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том II И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ *Выпуск 2*
1957

МНОГОМЕРНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ОДНОРОДНЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА СО СЧЕТНЫМ МНОЖЕСТВОМ СОСТОЯНИЙ

В. А. ВОЛКОНСКИЙ

§ 1. Введение. Формулировка результатов

Рассматривается однородная неприводимая возвратная цепь Маркова со счетным множеством состояний e_0, e_1, e_2, ... и вероятностями перехода p_{ij} из состояния e_i в состояние e_j*. Изучаются предельные распределения при $n \to \infty$ для случайного вектора $N_n = (N_n^0, \ldots, N_n^r)$, компонентами которого являются числа попаданий за n шагов соответственно в состояния e_0, e_1, ..., e_r.

При изучении предельного распределения последовательности случайных величин ζ_n эти величины обычно линейно нормируются, т. е. заменяются величинами $a_k\zeta_k + b_k$, где a_k и b_k $(k = 1, 2, \ldots)$ — некоторые постоянные. Как будет видно из дальнейшего, к вектору N_n придется применить более сложные аффинные преобразования. После общего линейного преобразования (аффинное преобразование без сдвига начала координат) вектор N_n перейдет в вектор с координатами вида $\sum_{k=0}^{r} a_k N_n^k$.

Пусть η означает число шагов с момента выхода из состояния e_0 до первого возвращения в него (будем называть эту величину временем возвращения) и $F(x)$ — функция распределения для η. Деблин в 1938 г. [1] исследовал случай, когда $\mathbf{D}\eta < \infty$. Он доказал, что предельное распределение при $n \to \infty$ для линейных форм $\sum_{k=0}^{\infty} a_k N_n^k$ при весьма слабых ограничениях на коэффициенты a_k будет нормальным. (Достаточно, например, потребовать, чтобы $a_k = 0$ для $k > r$.) Точнее, распределение величины

$$\frac{\sum_{0}^{\infty} a_k N_n^k - nC}{\sqrt{n}}$$

при некотором постоянном C сходится к нормальному или несобственному распределению с нулевым математическим ожиданием. При этом,

* В терминологии А. Н. Колмогорова (см., напр., [16]) неприводимая цепь называется цепью с одним классом состояний.

если p_{ik}^n обозначает вероятность перейти из состояния e_i в состояние e_k за n шагов и $p_k = \lim\limits_{n\to\infty} p_{kk}^{(n)}$, то $C = \sum\limits_0^\infty a_k p_k$. Повторяя рассуждения Деблина почти дословно, можно доказать, что распределения векторов

$$\frac{N_n - np}{\sqrt{n}},$$

где $p = (p_0, \ldots, p_r)$, сходятся к нормальному (м. б. вырожденному) распределению с нулевым математическим ожиданием *.

Предельные распределения для числа попаданий в одно состояние N_n^0 были изучены Феллером в 1949 г. [2] в предположении, что $F(x)$ принадлежат области притяжения устойчивого закона с некоторым показателем $\alpha\,(0<\alpha<2)$, т. е. что при любом $c>0$

$$\frac{1-F(cx)}{1-F(x)} \to c^{-\alpha} \quad (x\to\infty) \tag{1}$$

(см. [6]). Феллер предполагал, что им найдены вообще все возможные предельные распределения для N_n^0. Однако это не верно, как показывает теорема, полученная в 1954 г. З. И. Шарагиной [3]. З. И. Шарагина показала, что если (1) верно для $\alpha = 0$, то распределение N_n^0 сходится к показательному закону, который не входит в класс распределений, описанный Феллером.

В настоящей статье мы также предполагаем, что функция $F(x)$ удовлетворяет условию (1), при этом рассматриваются значения α в интервалах $0\leqslant\alpha<1$ и $1<\alpha<2$. Случай $\alpha = 1$ не рассматривается. Случай притяжения $F(x)$ к нормальному закону остается исследованным не полностью.

Введем случайные величины ν_k, равные числу попаданий в состояние e_k за время от выхода из e_0 до первого возвращения в e_0. Рассмотрим конечную цепь Маркова, с состояниями $e_0, e_1, \ldots, e_r$, получающуюся из исходной цепи следующим образом: из всех моментов времени выбираются такие $t_1<t_2<\ldots<t_k<\ldots$, в которых система находится в состояниях $e_0, \ldots, e_r$, а вероятностями перехода $\bar{p}_{ij}$ из e_i в e_j будут служить вероятности, выйдя из состояния e_i, впервые попасть в группу состояний $e_0, \ldots, e_r$ через состояние e_j. При этом путь и время блуждания системы вне выбранной группы состояний нас не интересуют. Иначе говоря, если через ω_t обозначено состояние системы в момент t в исходной цепи Маркова, то

$$\bar{p}_{ij} = \sum_{t=1}^{\infty} \mathbf{P}\,(\omega_t = e_j \mid \omega_0 = e_i;\quad \omega_\tau \neq e_l,\quad 0<\tau<t;\quad l = 0, 1, \ldots, r).$$

Величины $\nu_k\,(k\leqslant r)$ для конечной цепи будут распределены так же, как величины ν_k, определенные для исходной цепи. Так как конечная

* При этом необходимым и достаточным условием невырожденности предельного распределения является невырожденность матрицы $\| b_{kl} \|$, которая будет определена позже [см. (3)].

цепь, так же как исходная, будет неприводима, то для некоторых $c>0$ и $d>0$

$$\mathbf{P}(\nu_k > x) < ce^{-dx} \qquad (2)$$

(см., напр., [12]). Поэтому величины ν_k имеют все моменты. Обозначим

$$\pi_k = M\nu_k, \quad b_{kl} = \mathbf{M}(\nu_k - \pi_k)(\nu_l - \pi_l);\ k, l = 1, 2, \ldots, r^*. \qquad (3)$$

Будем предполагать, что матрица $\| b_{kl} \|$ невырожденная.

Рассмотрим пространство R^{r+1} векторов $a = (a_0, \ldots, a_r)$ и в нем подпространство R^r таких векторов, что $a_0 + \sum_{k=1}^{r} a_k \pi_k = 0$. Оказывается, что линейные формы $\sum_0^r a_k N_n^k$ имеют различное предельное распределение при $n \to \infty$ в зависимости от того, принадлежит ли вектор $a = (a_0, \ldots, a_r)$ подпространству R^r или нет. Пусть χ — случайная величина, распределение которой совпадает с предельным распределением для N_n^0, ζ есть r-мерный случайный вектор, распределенный сферически нормально и χ и ζ независимы. Тогда

1) если $a \in R^r$, то $\chi_n = \sum_{k=0}^{r} a_k N_n^k$ имеет при некоторой нормировке предельное распределение такое же, как χ;

2) произвольному базису в R^r соответствуют линейные формы $\zeta_n^1, \ldots, \zeta_n^r$, совместное предельное распределение которых при некоторой нормировке будет такое же, как у $\zeta\sqrt{\chi}$ в случае $0 \leqslant \alpha < 1$ и как у ζ в случае $1 < \alpha < 2$;

3) Совместное предельное распределение величин χ_n и $\zeta_n = (\zeta_n', \ldots, \zeta_n^r)$ совпадает с совместным распределением величин χ и $\zeta\sqrt{\chi}$ для $0 \leqslant \alpha < 1$ и величин χ и ζ для $1 < \alpha < 2$.

В нижеследующей теореме дается развернутая аналитическая формулировка этих утверждений, причем в качестве форм χ_n и ζ_n^k выбраны для определенности формы N_n^0 и $N_n^0 - \frac{N_n^k}{\pi_k}$. Нормировка, указанная в формулировке теоремы, приводит для векторов ζ_n к предельному нормальному распределению, отличному от сферического. Переход к сферическому распределению не представляет принципиальных трудностей, но форму-

* Величины π_k и b_{kl} могут быть явно вычислены по вероятностям переходов $\bar{p}_{ij}$ конечной цепи Маркова. Действительно, методом Деблина [1] легко доказать, что

$$\pi_k = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathbf{M}\mathring{N}_n^k}{\mathbf{M}\mathring{N}_n^0} \quad \text{и} \quad b_{kl} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathbf{M}(\mathring{N}_n^k - \mathbf{M}\mathring{N}_n^k)(\mathring{N}_n^l - \mathbf{M}\mathring{N}_n^l)}{\mathbf{M}\mathring{N}_n^0},$$

где $\mathring{N}_n^j$ есть число попаданий за n шагов в состояние e_j $(j = 0, 1, \ldots, r)$ конечной цепи, определенной выше. В работе С. Сираждинова [15] § 3 приводятся формулы для вычисления этих величин. В обозначениях С. Сираждинова $\pi_k = \frac{\lambda_k}{\lambda_0}$, $b_{kl} = \frac{\lambda_{kl}}{\lambda_0}$.

ны, которые при этом получаются, громоздки.

Введем следующие обозначения. При $1<\alpha<2$ пусть $V_\alpha(x)$ — устойчивый закон с показателями α и $\beta=1$, а именно, закон с характеристической функцией

$$f(t)=\exp\left\{-|t|^\alpha\left(\cos\frac{\pi\alpha}{2}+i\operatorname{sgn}t\sin\frac{\pi\alpha}{2}\right)\Gamma(1-\alpha)\right\}. \tag{4}$$

При $0<\alpha<1$ пусть:

$$V_\alpha(x)=\begin{cases}1-G_\alpha(x^{-\frac{1}{\alpha}}), & x>0\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

где $G_\alpha(y)$ — устойчивый закон с показателями α и $\beta=-1$ и с характеристической функцией

$$f(t)=\exp\left\{-|t|^\alpha\left(\cos\frac{\pi\alpha}{2}-i\operatorname{sgn}t\sin\frac{\pi\alpha}{2}\right)\Gamma(1-\alpha)\right\}.$$

При $\alpha=0$ полагаем:

$$V_0(y)=\begin{cases}1-e^{-y}, & y>0\\ 0, & y\leqslant 0\end{cases}$$

Далее положим

$$\bar{x}=(x_1,\ldots,x_r).$$

Пусть $G(\bar{x})$ — функция распределения, соответствующая нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и матрицей вторых моментов $\left\|\frac{b_{kl}}{\pi_k\pi_l}\right\|$; $k,\ l=1,\ 2,\ldots,r$.

Теорема. *Пусть $F(x)$ удовлетворяет условию* (1). *Тогда*

1) *для* $0\leqslant\alpha<1$

$$\mathbf{P}\left\{N_n^0<\frac{x_0}{c_n},\quad N_n^0-\frac{N_n^k}{\pi_k}<\frac{x_n}{\sqrt{c_n}};\quad k=1,\ldots,r\right\}\Rightarrow\int_0^{x_0}G\left(\frac{\bar{x}}{\sqrt{y}}\right)dV_\alpha(y), \tag{5}$$

где $c_n=1-F(n)$;

2) *для* $1<\alpha<2$

$$\mathbf{P}\left\{N_n^0<\frac{n}{\mu}+b_n\mu^{-\frac{1+\alpha}{\alpha}}x_0,\quad N_n^0-\frac{N_n^k}{\pi_k}<x_n\sqrt{\frac{n}{\mu}};\quad k=1,\ldots,r\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_\alpha(x_0)\,G(\bar{x}), \tag{6}$$

где $\mu=M\eta=\int_0^\infty x\,dF(x)$, *а* b_n *определяются из соотношения* $1-F(b_n)\sim\frac{1}{n}$.

(Знак $a_n\sim b_n$ означает везде, что $\frac{b_n}{a_n}\to 1$ при $n\to\infty$.)

Другими словами, если положить для $0\leqslant\alpha<1$

$$A_n=\begin{pmatrix}c_n & 0 & 0 & \ldots & 0\\ \sqrt{c_n} & -\frac{\sqrt{c_n}}{\pi_1} & 0 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \sqrt{c_n} & 0 & 0 & \ldots & -\frac{\sqrt{c_n}}{\pi_r}\end{pmatrix},\quad -B_n=\begin{pmatrix}-\frac{n\mu^{\frac{1}{\alpha}}}{b_n}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

и для $1<\alpha<2$

$$A_n=\begin{pmatrix} \frac{\mu^{\frac{1}{\alpha}+1}}{b_n} & 0 & \dots & 0 \\ \sqrt{\frac{\mu}{n}} & -\frac{1}{\pi_1}\sqrt{\frac{\mu}{n}} & \dots & 0 \\ \sqrt{\frac{\mu}{n}} & 0 & \dots & -\frac{1}{\pi_r}\sqrt{\frac{\mu}{n}} \end{pmatrix}, \qquad B_n=0$$

то векторы $A_nN_n+B_n$ при $n\to\infty$ будут иметь предельные распределения, которые указаны в соотношениях (5) и (6).

Замечание 1. В формулировке теоремы не оговаривается начальное состояние, из которого вышла система. Это законно ввиду того, что предельное распределение, как видно из доказательства, не зависит от начального состояния.

Замечание 2. Если вместо N_n^0 берется любая другая линейная форма $\hat{N}_n=\sum_{k=0}^{r}a_kN_n^k$, для которой $a_0+\sum_{1}^{r}\pi_ka_k\neq 0$, то теорема остается верной при замене N_n^0 на $\dfrac{\hat{N}_n}{a_0+\sum_{1}^{n}a_k\pi_k}$.

При доказательстве теоремы мы будем опираться на предельное соотношение

$$\mathbf{P}\left(N_n^0<\frac{x}{c_n}\right)\to V_\alpha(x),\ (0\leqslant\alpha<1) \tag{7}$$

полученное, как уже было сказано, В. Феллером (для $0<\alpha<1$) и З. Шарагиной (для $\alpha=0$).

Метод доказательства является развитием методов В. Деблина [1] и Р. Л. Добрушина [4].

Приношу глубокую благодарность Е. Б. Дынкину за руководство и помощь, оказанную при написании этой заметки, и Р. Л. Добрушину за ряд ценных советов.

§ 2. Вспомогательные леммы

Доказательство опирается на следующие леммы. Пусть $\bar{x}=(x_1,\dots,x_r)$. Обозначим $U(\bar{x})$ область r-мерного эвклидова пространства, содержащую точки с координатами $(\zeta_1,\dots,\zeta_r)$, $\zeta_k<x_k$; $k=1,2,\dots,r$.

Лемма 1. *Пусть* $\tau_n=\tau_n(\omega)$ *последовательность случайных величин, причем множество значений* L_n, *принимаемых величиной* τ_n, *счетно. Пусть* $\mu_n(l)=\mu_n(l,\omega)$ — *последовательность* r-*мерных случайных векторов, зависящих от параметра* $l\in L_n$. *Предположим, что*

$$\mathbf{P}(\tau_n<y)\to V(y),\quad (n\to\infty). \tag{8}$$

Кроме того, допустим, что для любого $\delta>0$ *существует отрезок* $[\sigma_1,\sigma_2]$ *такой, что* $V(\sigma_2)-V(\sigma_1)>1-\sigma$ *и*

$$\mathbf{P}\{\mu_n(l_n)\in U(\bar{x})\mid\tau_n=l_n\}\to G(\bar{x}),\quad (n\to\infty) \tag{9}$$

для любой последовательности $l_n \in L_n \cap [\sigma_1, \sigma_2]$. *Тогда*

$$\mathbf{P}\{\tau_n < x_0, \quad \mu_n(\tau_n) \in U(\bar{x})\} \Rightarrow G(\bar{x})\, V(x_0), \quad (n \to \infty). \tag{10}$$

Доказательство. Имеем

$$\mathbf{P}\{\tau_n < x_0, \quad \mu_n(\tau_n) \in U(\bar{x})\} = \int_{-\infty}^{x_0} \mathbf{P}\{\mu_n(y) \in U(\bar{x}) \mid \tau_n = y\}\, dP(\tau_n < y),$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \int_{-\infty}^{x_0} \mathbf{P}\{\mu_n(y) \in U(\bar{x}) \mid \tau_n = y\}\, d\mathbf{P}(\tau_n < y) - G(\bar{x})\, V(x_0) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{n\to\infty} \left| \int\limits_{(-\infty, x_0) \cap [\sigma_1, \sigma_2]} \mathbf{P}\{\mu_n(y) \in U(\bar{x}) \mid \tau_n = y\}\, d\mathbf{P}(\tau_n < y) - \right.$$

$$\left. - G(\bar{x}) \int\limits_{(-\infty, x_0) \cap [\sigma_1, \sigma_2]} dV(y) \right| + 2 \int\limits_{(-\infty, x_0) \setminus [\sigma_1, \sigma_2]} dV(y).$$

Первый член правой части неравенства равен нулю, а второй меньше чем 2δ. Лемма доказана.

В дальнейшем нам понадобится следующее следствие этой леммы:

Следствие. *Если выполнены условия леммы,* $\tau_n \geqslant 0$, а $V(y)$ *и* $G(\bar{x})$ — *задают абсолютно непрерывные распределения, то*

$$\mathbf{P}\{\tau_n < x_0, \ \sqrt{\tau_n}\, \mu_n(\tau_n) \in U(\bar{x})\} \Rightarrow \int_0^{x_0} G\left(\frac{\bar{x}}{\sqrt{y}}\right) dV(y). \tag{11}$$

Действительно, предельное совместное распределение в $r+1$-мерном пространстве векторов $(\tau_n, \mu_n(\tau_n))$ можно описать как совместное распределение некоторых независимых величин τ и μ (μ есть r-мерный вектор) с функциями распределения $V(x_0)$ и $G(\bar{x})$.

Событие $\{\tau_n < x_0, \sqrt{\tau_n}\mu_n(\tau_n) \in U(\bar{x})\}$ означает, что вектор $(\tau_n, \mu_n(\tau_n))$ принадлежит некоторой области $\mathfrak{M}$ в $r+1$-мерном пространстве с мерой границы, равной нулю. Поэтому предельная вероятность этого события совпадает с мерой области $\mathfrak{M}$, которую индуцирует предельное распределение для $(\tau_n, \mu_n(\tau_n))$. Поэтому эта предельная вероятность равна

$$\mathbf{P}\{\tau < x_0, \ \sqrt{\tau}\mu \in U(\bar{x})\} = \int_{-\infty}^{x_0} \mathbf{P}\left\{\mu \in U\left(\frac{\bar{x}}{\sqrt{y}}\right)\right\} dP(\tau < y) = \int_{-\infty}^{x_0} G\left(\frac{\bar{x}}{\sqrt{y}}\right) dV(y).$$

Лемма 2. *Пусть* $\eta_1, \eta_2, \ldots$ *неотрицательные независимые одинаково распределенные величины, функция распределения которых обладает свойством* (1) *для* $0 \leqslant \alpha < 2$. *Пусть величины* $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ *расположены в невозрастающую последовательность, причем* $\eta_k^{(n)}$ *есть* k*-й член этой последовательности, так что*

$$\eta_1^{(n)} \geqslant \eta_2^{(n)} \geqslant \ldots \geqslant \eta_n^{(n)}.$$

Пусть $S_n = \sum_1^n \eta_k$ *и пусть* $\varphi(n)$ — *любая положительная монотонная функция, для которой* $\varphi(n) \leqslant n$, $\varphi(n) \underset{n\to\infty}{\to} \infty$. *Тогда*

1) *если* $1<\alpha<2$, *то найдутся последовательность случайных величин* $l_n \leqslant \varphi(n)$ *и последовательность постоянных* q_n *такие, что*

$$\frac{S_n - \bar{S}_n}{b_n} \quad 0\ *,$$

где $\bar{S}_n = q_n + \sum_{k \leqslant l_n} \eta_k^{(n)}$ *и* b_n *определяются из соотношения* $1 - F(b_n) \sim \frac{1}{n}$,

2) *если* $0 \leqslant \alpha < 1$, *то*

$$\frac{\bar{S}_n}{S_n} \xrightarrow{\mathbf{P}} 1,$$

где $\bar{S}_n = \sum_{k \leqslant \varphi(n)} \eta_k^{(n)}$. *Очевидно,* $\bar{S}_1 \leqslant \bar{S}_2 \leqslant \ldots$ *и* $\bar{S}_n$**.

Доказательство. Если $\alpha = 0$, то по теореме, доказанной Дарлингом [5], $\frac{\eta_1^{(n)}}{S_n} \xrightarrow{\mathbf{P}} 1$ $(n \to \infty)$. Так как η_{nk} неотрицательны, то и $\frac{\bar{S}_n}{S_n} \xrightarrow{\mathbf{P}} 1 \times$ $\times$ $(n \to \infty)$.

Рассмотрим теперь случай, когда $0 < \alpha < 2$. Определим b_n из соотношения $1 - F(b_n) \sim \frac{1}{n}$ и положим $\eta_{nk} = \frac{\eta_k}{b_n}$ (соответственно $\eta_{nk}^{(n)} = \frac{\eta_k^{(n)}}{b_n}$). Представим η_{nk} в виде суммы двух случайных величин

$$\eta_{nk} = \eta'_{nk} + \eta''_{nk},$$

где

$$\eta'_{nk} = \begin{cases} \eta_{nk}, & \eta_{nk} \geqslant \varepsilon, \\ 0, & \eta_{nk} < \varepsilon, \end{cases} \qquad \eta''_{nk} = \begin{cases} 0, & \eta_{nk} \geqslant \varepsilon \\ \eta_{nk}, & \eta_{nk} < \varepsilon. \end{cases}$$

Из (1) имеем

$$n\mathbf{P}(\eta_{nk} \geqslant \varepsilon) \sim \frac{\mathbf{P}(\eta_{nk} \geqslant \varepsilon)}{\mathbf{P}(\eta_{nk} \geqslant 1)} \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{c}{\varepsilon^\alpha},$$

где c — некоторая константа. Поэтому для каждого фиксированного ε число $m_n(\varepsilon)$ положительных η'_{nk} распределено по биномиальному закону, который при $n \to \infty$ сходится к пуассоновскому с параметром $\frac{c}{\varepsilon^\alpha}$.

Опираясь на критерий, изложенный в [6], стр. 132, легко проверить, что распределения сумм $\zeta_n''(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{n} \eta''_{nk}(\varepsilon) - A_n(\varepsilon)$ при некотором наборе постоянных $A_n(\varepsilon)$ сходятся при $n \to \infty$ к безгранично делимому закону с характеристической функцией

$$\psi_\varepsilon(t) = \exp\left\{\int_0^\varepsilon \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{dx}{x^{1+\alpha}} + itC_1\varepsilon^{1-\alpha}\right\},$$

где C_1 — постоянная, не зависящая от ε. При этом в случае $\alpha < 1$ можно

* Знак $\xrightarrow{\mathbf{P}}$ означает сходимость по вероятности.

** Лемма 2 была сообщена нам А. Скороходом.

положить $A_n(\varepsilon)\equiv 0$, а в случае $\alpha>1$ с помощью соответствующего выбора $A_n(\varepsilon)$ сделаем $C_1=0$.

При $\varepsilon\to 0$ имеем $\psi_\varepsilon(t)\to 1$, т. е. предельные распределения для величин $\zeta_n''(\varepsilon)$ сходятся к нулю по вероятности. Поэтому при $\varepsilon\to 0$ для любых положительных γ_i и δ_i можно выбрать настолько малое ε_i и настолько большое n_i, что при $n>n_i$

$$\mathbf{P}\{|\zeta_n''(\varepsilon_i)|>\gamma_i\}<\frac{\delta_i}{2}. \tag{12}$$

Кроме того, можно выбрать настолько большое m_i, что при $n>m_i$

$$\mathbf{P}\{m_n(\varepsilon_i)>\varphi(n)\}<\frac{\delta_i}{2}. \tag{13}$$

Выберем пары (γ_i, δ_i) так, чтобы $\gamma_i\to 0$, $\delta_i\to 0$. Заметим, что без ограничения общности последовательность $\bar{n}_i=\max(n_i, m_i)$ можно считать неубывающей. Предположим сначала, что $0<\alpha<1$, и положим

$$B_n=\left\{\left|\frac{S_n-\bar{S}_n}{b_n}\right|>\gamma_i\right\}$$

для $\bar{n}_i<n\leqslant\bar{n}_{i+1}$,

где S_n и $\bar{S}_n$ определены так, как указано в условии леммы. Имеем

$$B_n\subset B_n\cap\{m_n(\varepsilon_i)\leqslant\varphi(n)\}\cup\{m_n(\varepsilon_i)>\varphi(n)\}. \tag{14}$$

Так как $\eta_{nk}\geqslant 0$, то в случае $m_n(\varepsilon_i)\leqslant\varphi(n)$ получаем

$$\sum_{k\leqslant\varphi(n)}\eta_{nk}^{(n)}\geqslant\sum_{k\leqslant m_n(\varepsilon_i)}\eta_{nk}^{(n)}=\sum_1^n\eta_{nk}'(\varepsilon_i).$$

Поэтому для этого случая

$$0\leqslant\frac{S_n-\bar{S}_n}{b_n}=\sum_1^n\eta_{nk}-\sum_{k\leqslant\varphi(n)}\eta_{nk}^{(n)}\leqslant\sum_1^n\eta_{nk}''(\varepsilon_i)=\zeta_n''(\varepsilon_i).$$

Таким образом,

$$B_n\subset\{|\zeta_n''(\varepsilon_i)>\gamma_i\}\cup\{m_n(\varepsilon_i)>\varphi(n)\}.$$

Учитывая (12) и (13), окончательно получаем $\mathbf{P}(B_n)<\delta_i$ для $\bar{n}_i<n<\bar{n}_{i+1}$, т. е.

$$\frac{S_n-\bar{S}_n}{b_n}\xrightarrow{\mathbf{P}}0\quad(n\to\infty).$$

Это можно переписать так:

$$\left(\frac{\bar{S}_n}{S_n}-1\right)\frac{S_n}{b_n}\xrightarrow{\mathbf{P}}0.$$

Так как $\frac{S_n}{b_n}$ имеет при $n\to\infty$ предельное устойчивое распределение (см. [6],

стр. 189), которое непрерывно, то величины $\frac{b_n}{S_n}$ имеют предельное распределение вероятностей при $n \to \infty$. Поэтому

$$\frac{\overline{S}_n}{S_n} - 1 \xrightarrow{\mathcal{P}} 0 \quad (n \to \infty).$$

Для случая $1 < \alpha < 2$ определяем сначала величины l_n и q_n равенствами для $\overline{n}_i < n < \overline{n}_{i+1}$

$$l_n = \min\,(m_n(\varepsilon_i),\ \varphi(n)),$$

$$q_n = A_n(\varepsilon_i)\, b_n.$$

Теперь по формуле, указанной в условии леммы, определяем $\overline{S}_n = q_n + \sum\limits_{k \leqslant l_n} \eta_k^{(n)}$ и вводим событие

$$B_n = \left\{ \left| \frac{S_n - \overline{S}_n}{b_n} \right| > \gamma_i \right\} = \left\{ \left| \sum_1^n \eta'_{nk}(\varepsilon_i) + \sum_1^n \eta''_{nk}(\varepsilon_i) - \sum_{k \leqslant l_n} \eta_{nk}^{(n)} - A_n(\varepsilon_i) \right| > \gamma_i \right\}.$$

Если

$$m_n(\varepsilon_i) \leqslant \varphi(n), \text{ то } \sum_1^n \eta'_{nk}(\varepsilon_i) = \sum_{k \leqslant l_n} \eta_{nk}^{(n)}.$$

Снова используем включение (14) и получаем

$$B_n \subset \left\{ \left| \sum_1^n \eta''_{nk}(\varepsilon_i) - A_n(\varepsilon_i) \right| > \gamma_i \right\} \cup \{ m_n(\varepsilon_i) > \varphi(n) \} =$$

$$= \{ |\zeta''_n(\varepsilon_i)| > \gamma_i \} \cup \{ m_n(\varepsilon_i) > \varphi(n) \}.$$

Учитывая (12) и (13), опять получаем

$$\frac{S_n - \overline{S}_n}{b_n} \xrightarrow{\mathcal{P}} 0 \quad (n \to \infty).$$

Лемма доказана.

§ 3. Доказательство теоремы

Для доказательства теоремы разобьем все время блуждания на отрезки между последовательными попаданиями в состояние e_0 (циклы). Введем обозначения: S'_k — номер шага, на котором система k-й раз попала в e_0,

$$\eta_{1k} = S'_{k+1} - S'_k \text{ и } S_n = \sum_1^n \eta_k.$$

Кроме того обозначим

$$\zeta_n = (\zeta'_n, \ \ldots\ , \zeta^r_n) = \left(N_n^0 - \frac{N'_n}{\pi_1}\ , \ \ldots\ , \ N_n^0 - \frac{N_n^r}{\pi_r} \right),$$

$$\xi_k = (\xi'_k, \ \ldots\ , \xi^r_k) = \zeta_{S'_{k+1}} - \zeta_{S'_k}$$

$$\zeta(k) = \sum_{1}^{k} \xi_j .$$

Очевидно, последовательности η_k и ξ_k являются последовательностями одинаково распределенных независимых величин.

Из определения величины ξ_k^l вытекает, что

$$\xi_k^l = 1 - \frac{\nu_l^{(k)}}{\pi_l}, \tag{15}$$

где $\nu_l^{(k)}$ — число попаданий в состояние e_l между k-м и $(k+1)$-м попаданиями в e_0. Учитывая (3), имеем

$$\mathbf{M}\xi_k^l = 0, \quad \mathbf{M}\xi_k^p \xi_k^q = \frac{b_{pq}}{\pi_p \pi_q}. \tag{16}$$

В этих обозначениях утверждение теоремы записывается следующим образом:

1) для $0 \leqslant \alpha < 1$

$$\mathbf{P}\{N_n^0 c_n < x_0,\ \zeta_n \sqrt{c_n} \in U(\bar{x})\} \Rightarrow \int_0^{x_0} G\left(\frac{\bar{x}}{\sqrt{y}}\right) dV_\alpha(y) \tag{5'}$$

2) для $1 < \alpha < 2$

$$\mathbf{P}\left\{\frac{N_n^0 - \frac{n}{\mu}}{b_{\bar{n}}\mu^{-\frac{1+\alpha}{\alpha}}} < x_0,\ \zeta_n \sqrt{\frac{\mu}{n}} \in U(\bar{x})\right\} \Rightarrow V_\alpha(x_0)\, G(\bar{x}). \tag{6'}$$

В § 3 мы докажем, что соотношения (5′) и (6′) справедливы, если заменить величины N_n^0 и ζ_n некоторыми вспомогательными случайными величинами. В § 4 мы оценим ошибку, которая вызывается этой заменой и покажем, что она не влияет на предельные распределения. Соотношения (5′) и (6′) будут доказываться с заменой N_n^0 на $\widetilde{N}_n$ и ζ_n на $\zeta(\widetilde{N}_n)$ в случае $\alpha < 1$ и N_n^0 на $\frac{2n}{\mu} - \frac{1}{\mu}\widetilde{S}_{\left[\frac{n}{\mu}\right]}$ и ζ_n на $\widetilde{\zeta}\left(\left[\frac{n}{\mu}\right]\right)$ в случае $\alpha > 1$, где μ есть математическое ожидание времени возвращения, а величины $\widetilde{N}_n$, $\widetilde{S}_n$ и $\widetilde{\zeta}(k)$ будут определены ниже.

Переходим к определению вспомогательных величин $\widetilde{N}_n$, $\widetilde{S}_n$ и $\widetilde{\zeta}(k)$. Для последовательности длин циклов $\eta_1, \eta_2, \ldots$ и $\varphi(n) = [\ln n]$ вводим величины $\widetilde{S}_n$ так же, как в лемме 2, и определяем m_k из соотношения

$$1 - F(m_k) \sim k^{-\delta}, \tag{17}$$

где δ — любое число из интервала $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Пусть $1 < \alpha < 2$. Положим

$$\widetilde{S}_k = \begin{cases} S_k, & \text{если } \eta_{[\ln k]+1}^{(k)} \geqslant m_k \\ 0, & \text{если } \eta_{[\ln k]+1} < m_k. \end{cases}$$

Докажем, что $\widetilde{S}_n - \widetilde{S}_n \to 0\ (n \to \infty)$. Для этого воспользуемся оценкой

$$\ln F(m_k) \sim F(m_k) - 1 \sim -k^{-\delta}\ (k \to \infty).$$

Отсюда

$$\ln \mathbf{P}\left(\eta^{(k)}_{[\ln k]+1} < m_k\right) = \ln\left\{[F(m_k)]^{k-[\ln k]-1}\right\} \underset{k\to\infty}{\sim} -k^{1-\delta}$$

и при достаточно больших k

$$\mathbf{P}\left(\eta^{(k)}_{[\ln k]+1} < m_k\right) < e^{-\frac{1}{2}k^{1-\delta}}. \tag{18}$$

Из (18) получаем

$$\mathbf{P}\left(\widetilde{S}_k \neq \overline{S}_k\right) \leqslant \mathbf{P}\left(\eta^{(k)}_{[\ln k]+1} < m_k\right) \to 0 \quad (k\to\infty). \tag{19}$$

Пусть теперь $0 \leqslant \alpha < 1$. Полагаем

$$\overline{N}_n = \min_{\overline{S}_k > n} k. \tag{20}$$

Укажем тут же на связь величин $\overline{N}_n$ и $\overline{S}_k$. Так же как для величин N^0_n и S_k имеет место равенство

$$\mathbf{P}\left(N^0_{[y]} \leqslant x\right) = \mathbf{P}\left(S_{[x]} > y\right), \tag{21}$$

для величин $\overline{N}_n$ и $\overline{S}_k$ справедливо равенство

$$\mathbf{P}\left(\overline{N}_{[y]} \leqslant x\right) = \mathbf{P}\left(\overline{S}_{[x]} > y\right). \tag{22}$$

Теперь вводим величины

$$\widetilde{N}_n = \begin{cases} k & \text{при } \overline{N}_n = k,\ \eta^{(k)}_{[\ln k]+1} \geqslant m_k \ (k = 0, 1, 2, \ldots) \\ 0 & \overline{N}_n = k,\ \eta^{(k)}_{[\ln k]+1} < m_k. \end{cases}$$

Замечаем, что

$$\mathbf{P}\left(\overline{N}_n \neq \widetilde{N}_n\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(\overline{N}_n = k,\ \eta^{(k)}_{[\ln k]+1} < m_k\right) = \sum_{1}^{M} + \sum_{M+1}^{\infty} \leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{P}\left(\overline{N}_n \leqslant M\right) + \sum_{k>M} [F(m_k)]^{k-[\ln k]-1} < \mathbf{P}\left(\overline{N}_n \leqslant M\right) + \sum_{k>M} e^{-\frac{1}{2}k^{1-\delta}}$$

при достаточно больших M. Так как $\overline{S}_n \leqslant S_n$, то $\overline{N}_n \geqslant N^0_n$. Поскольку $N^0_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$, то $\mathbf{P}\left(\overline{N}_n \leqslant M\right) \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Далее $\sum_{k>M} e^{-\frac{1}{2}k^{1-\delta}} \underset{M\to\infty}{\to} 0$. Поэтому

$$\mathbf{P}\left(\overline{N}_n \neq \widetilde{N}_n\right) \to 0 \quad (n\to\infty). \tag{23}$$

Пусть $r^{(k)}_j$ — номер j-го по величине цикла из $\eta_1, \ldots, \eta_k$, так что в обозначениях леммы 2 $\eta^{(k)}_j = \eta_{r^{(k)}_j}$. Положим

$$\widetilde{\zeta}(k) = \zeta(k) - \sum_{j=1}^{[\ln k]+1} \xi_{r^{(k)}_j}. \tag{24}$$

Далее в леммах 3, 4 и 5 мы докажем, что величины, определенные

следующим образом:

$$\text{для } 0 \leqslant \alpha < 1\text{: } \tau_n = \widetilde{N}_n c_n,\ \mu_n(l) = \frac{\widetilde{\zeta}\left(\frac{l}{c_n}\right)}{\sqrt{\frac{l}{c_n}}}; \tag{25}$$

$$\text{для } 1 < \alpha < 2\text{: } \tau_n = -\frac{\widetilde{S}_{\left[\frac{n}{\mu}\right]} - n}{b_n \mu^{-\frac{1+\alpha}{\alpha}}},\ \mu_n(l) = \frac{\widetilde{\zeta}\left(\left[\frac{n}{\mu}\right]\right)}{\sqrt{\left[\frac{n}{\mu}\right]}} \tag{26}$$

удовлетворяют условиям леммы 1. Применяя затем лемму 1, мы найдем совместные предельные распределения величин $\widetilde{N}_n$ и $\widetilde{\zeta}(\widetilde{N}_n)$ в случае $\alpha < 1$ и величин $\widetilde{S}_{\left[\frac{n}{\mu}\right]}$ и $\widetilde{\zeta}\left(\left[\frac{n}{\mu}\right]\right)$ в случае $\alpha > 1$ при соответствующей нормировке.

Как уже было сказано, эти совместные предельные распределения совпадают с соответствующими предельными распределениями величин, фигурирующих в условиях теоремы.

Лемма 3. *Величины* τ_n, *введенные равенствами* (25) *и* (26), *обладают свойством*

$$\mathbf{P}(\tau_n < x) \Rightarrow V_\alpha(x) \quad (n \to \infty), \tag{27}$$

где $V_\alpha(x)$ *есть функция распределения, определенная в § 1.*

Случай $\alpha < 1$. В силу (23) достаточно доказать, что $\mathbf{P}(\overline{N}_n c_n < x) \Rightarrow \Rightarrow V_\alpha(x)$. Так как $c_n \to 0$, то по лемме 2 для любого $\delta > 0$ при достаточно больших n

$$\mathbf{P}\left(\overline{N}_n \leqslant \frac{x}{c_n}\right) = \mathbf{P}\left(\overline{S}_{\left[\frac{x}{c_n}\right]} > n\right) > \mathbf{P}\left\{S_{\left[\frac{x}{c_n}\right](1-\delta)} > n\right\} - \delta =$$

$$= \mathbf{P}\left(N^0_{\left[\frac{n}{1-\delta}\right]} \leqslant \frac{x}{c_n}\right) - \delta.$$

(Здесь мы использовали равенства (21) и (22).)

В силу соотношения (7), доказанного Феллером [2] и З. И. Шарагиной [3], и в силу соотношения $\frac{c_{yn}}{c_n} \to y^{-\alpha}$, вытекающего из определения c_n, имеем для больших n

$$\mathbf{P}\left(N^0_{\left[\frac{n}{1-\delta}\right]} \leqslant \frac{x}{c_n}\right) \to V_\alpha[x(1-\delta)^\alpha] \quad (n \to \infty)$$

и

$$\mathbf{P}\left(N^0_n \leqslant \frac{x}{c_n}\right) > V_\alpha[x(1-\delta)^\alpha] - 2\delta.$$

Кроме того, вследствие неравенства $\overline{S}_n \leqslant S_n$, имеем $\overline{N}_n \geqslant N^0_n$ и, значит, при достаточно больших n

$$\mathbf{P}\left(\overline{N}_n \leqslant \frac{x}{c_n}\right) \leqslant \mathbf{P}\left(N^0_n \leqslant \frac{x}{c_n}\right) < V_\alpha(x) + \delta.$$

В силу произвольности δ и непрерывности $V_\alpha(x)$, для любого x

$$\mathbf{P}\left(\overline{N}_n \leqslant \frac{x}{c_n}\right) \to V_\alpha(x) \quad (n \to \infty).$$

Это соотношение в сочетании с (23) доказывает (27).

Случай $\alpha > 1$. Условие (1) есть условие притяжения распределения длины цикла к устойчивому закону $G_\alpha(x)$. Поэтому (см. [6])

$$\mathbf{P}\left\{\frac{S_k - k\mu}{b_k} < x\right\} \Rightarrow G_\alpha(x), \quad (k \to \infty)$$

и

$$\mathbf{P}\left\{\frac{S_{\left[\frac{n}{\mu}\right]} - n}{b_n \mu^{-\frac{1+\alpha}{\alpha}}} < x\right\} \Rightarrow 1 - G_\alpha(-x) = V_\alpha(x) \quad (n \to \infty).$$

В силу леммы 2 и соотношения (22)

$$\frac{\widetilde{S}_n - S_n}{b_n} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0 \quad (n \to \infty).$$

Это доказывает (27).

Лемма 4. *Пусть m_k определяется соотношением*

$$1 - F(m_k) \sim k^{-\delta}, \ \frac{1}{2} < \delta < 1$$

и M_k обозначает условное математическое ожидание при условии $\{\eta_j \leqslant a_k\}$. Тогда при любой последовательности a_k такой, что $a_k > m_k$ и при любых p и q

$$M_k \xi_j^p = o\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right), \quad (k \to \infty) \tag{28}$$

$$M_k \xi_j^p \xi_j^q \to \frac{b_{pq}}{\pi_p \pi_q} \ (k \to \infty). \tag{29}$$

Доказательство. Из (2) и (15) вытекает, что имеются такие $c_1 > 0$ и $d_1 > 0$, что при достаточно больших k

$$\mathbf{P}(|\xi_j^p| > x \,|\, \eta_j \leqslant a_k) \leqslant \frac{\mathbf{P}(|\xi_j^p| > x)}{\mathbf{P}(\eta_j \leqslant m_k)} < c_1 e^{-d_1 x}.$$

Имеем

$$|M_k \xi_i^p - M \xi_j^p| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{P}(\xi_j^p < x \,|\, \eta_j \leqslant a_k) - \mathbf{P}(\xi_j^p < x)]\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-k^\varepsilon}^{k^\varepsilon} |\mathbf{P}(\xi_j^p < x \,|\, \eta_j \leqslant a_k) - \mathbf{P}(\xi_j^p < x)|\, dx + 2c_1 \int_{|x| > k^\varepsilon} e^{-d_1 |x|} dx. \tag{30}$$

Второй член правой части есть $o\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ при любом $\varepsilon > 0$. Далее

$$|\mathbf{P}(\xi_j^p < x \,|\, \eta_j \leqslant a_k) - \mathbf{P}(\xi_j^p < x)| = \left| \frac{\mathbf{P}(\xi_j^p < x, \ \eta_j \leqslant a_k)}{\mathbf{P}(\eta_j \leqslant a_k)} - P(\xi_j^p < x) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|-\mathbf{P}(\xi_j^p < x) + \mathbf{P}(\xi_j^p < x \mid \eta_j \leqslant a_k) + \mathbf{P}(\xi_j^p < x) - \mathbf{P}(\xi_j^p < x)\,\mathbf{P}(\eta_j \leqslant a_k)|}{\mathbf{P}(\eta_j \leqslant a_k)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\mathbf{P}(\eta_j > a_k)}{\mathbf{P}(\eta_j \leqslant a_k)} \leqslant 2\,\frac{1-F(m_k)}{F(m_k)} \sim 2k^{-\delta} \quad (k \to \infty).$$

При $\varepsilon < \delta - \frac{1}{2}$ первый член правой части (30) также становится $o\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$.

Так как $M\xi_j^p = 0$, то (28) доказано.

Соотношение (29) доказывается вполне аналогично.

Лемма 5. *Пусть $G(\bar{x})$ — нормальное распределение, определенное в формулировке теоремы. Тогда для $0 \leqslant \alpha < 1$*

$$\mathbf{P} = \left\{\frac{\tilde{\zeta}(k)}{\sqrt{k}} \in U(\bar{x}) \mid \tilde{N}_n = k\right\} \Rightarrow G(\bar{x}) \quad (k \to \infty)$$

равномерно по n. Для $1 < \alpha < 2$

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\tilde{\zeta}(k)}{\sqrt{k}} \in U(\bar{x}) \;\; \tilde{S}_k = a\right\} \Rightarrow G(\bar{x}) \quad (k \to \infty)$$

равномерно по $a > 0$.

Доказательство. Рассмотрим всевозможные наборы β, содержащие $[\ln k] + 1$ различных чисел из первых k чисел натурального ряда и наборы α из любых $[\ln k] + 1$ чисел натурального ряда, расположенные в невозрастающем порядке. Возьмем событие $B_{\alpha\beta}$, состоящее в том, что номера наибольших $[\ln k] + 1$ циклов из первых k циклов, расположенных в невозрастающем порядке, составляют набор β, а величины этих циклов составляют набор α. В прежних обозначениях

$$B_{\alpha\beta} = \left\{\{r_j^{(k)}\}_{j=1,2,\ldots,[\ln k]+1} = \beta; \quad \{\eta_{|r_j^{(k)}\}_{j=1,\ldots,[\ln k]+1} = \alpha\right\}.$$

События $B_{\alpha\beta}$, очевидно, образуют полную систему событий, причем события $\{\tilde{N}_n = k\}$ и $\{\tilde{S}_k = a\}$ представляют собой суммы событий типа $B_{\alpha\beta}$.

Обозначим через A событие $\left\{\frac{\tilde{\zeta}(k)}{\sqrt{k}} \in U(\bar{x})\right\}$; для доказательства леммы достаточно доказать, что

$$\mathbf{P}(A \mid B_{\alpha\beta}) \Rightarrow G(\bar{x}), \tag{31}$$

когда $k \to \infty$, а α и β изменяются при этом произвольным образом так, что $B_{\alpha\beta} \subset \{\tilde{N}_n = k\}$ или, соответственно,

$$B_{\alpha\beta} \subset \{\tilde{S}_k = a\}, \quad a > 0.$$

Действительно, имеем

$$\mathbf{P}(A \mid \tilde{N}_n = k) = \frac{\Sigma^* \mathbf{P}(A \mid B_{\alpha\beta})\,\mathbf{P}(B_{\alpha\beta})}{\mathbf{P}(\tilde{N}_n = k)},$$

где в правой части Σ^* означает, что суммирование проводится по тем наборам α и β, для которых $B_{\alpha\beta} \subset \{\tilde{N}_n = k\}$.

Из (31) сразу вытекает, что правая часть стремится к $G(x)$ при $k \to \infty$.

Для доказательства (31) заметим, что для каждого k, если зафиксированы α и β, событие A определяется поведением процесса только в течение тех из k циклов, номера которых не содержатся в наборе β. Условие $B_{\alpha\beta}$ накладывает на поведение процесса в течение этих циклов единственное дополнительное ограничение, чтобы длины этих циклов были не больше наименьшего числа $\hat{\alpha}$ из набора α. Поэтому

$$\mathbf{P}(A \mid B_{\alpha\beta}) = \mathbf{P}\left\{\frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{j \leqslant k,\, j \in \beta} \xi_j \in U(\bar{x}) \,\middle|\, \eta_j \leqslant \hat{\alpha} \text{ для } j \in \beta\right\}.$$

Так как величины ξ_j одинаково распределены и векторы $(\xi_j', \xi_j^2, \ldots, \ldots, \xi_j^r, \eta_j)$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ независимы, то

$$\mathbf{P}(A \mid B_{\alpha\beta}) = \mathbf{P}\left\{\frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{j=1}^{k-[\ln k]-1} \xi_j \in U(\bar{x}) \,\middle|\, \eta_j \leqslant \hat{\alpha},\ j \leqslant k - [\ln k] - 1\right\}. \quad (32)$$

Согласно определению величин $\widetilde{N}_n$ и $\widetilde{S}_k$ для тех $B_{\alpha\beta}$, которые содержатся в событиях $\{\widetilde{N}_n = k\}$ и $\{\widetilde{S}_k = a\}$ $(a > 0)$, величина $\hat{\alpha}$ должна быть не меньше m_k при всяком k. Поэтому можно применить лемму 4 и найти выражение для характеристической функции $\varphi(t_1, \ldots, t_r)$ вектора ξ_j при условии $B_{\alpha\beta}$ в виде

$$\varphi(t_1, \ldots, t_r) = 1 + o\left(\frac{1}{\sqrt{k}} \sum_q |t_q|\right) - \frac{1}{2} \sum_{p,q} \frac{b_{pq} t_p t_q}{\pi_p \pi_q} + o\left(\sum_{p,q} |t_p t_q|\right).$$

Найдем теперь характеристическую функцию $\psi(t_1, \ldots, t_r)$ для величины $\frac{\widetilde{\zeta}(k)}{\sqrt{k}}$ при условии $B_{\alpha\beta}$. Обозначим событие $\{\eta_j < \hat{\alpha}\}$ через C_j и характеристическую функцию произвольного множества M в пространстве элементарных событий через $\chi_M(\omega)$. Тогда, согласно (32),

$$\psi(t_1, \ldots, t_r) = \frac{\mathbf{M} \exp\left\{i \sum_{j=1}^{k-[\ln k]-1} \sum_{p=1}^{r} t_p \xi_j^p\right\} \chi_{\bigcap C_j}(\omega)}{\mathbf{P}\left\{\bigcap_j C_j\right\}} =$$

$$= \frac{\mathbf{M} \prod_{j=1}^{k-[\ln k]-1} \exp\left\{i \sum_p t_p \xi_j^p\right\} \chi_{C_j}(\omega)}{P\left(\bigcap_j C_j\right)}$$

суммирование и пересечение по j проводится в пределах $1 \leqslant j \leqslant k - [\ln k] - 1$). Так как векторы $(\xi_j', \ldots, \xi_j^r, \eta_j)$ независимы, то любые измеримые функции от них независимы и, используя теорему о математическом ожидании произведения независимых функций, получаем

$$\psi(t_1, \ldots, t_r) = \prod_j \frac{\mathbf{M} \exp\left(i \sum_p t_p \xi_j^p\right) \chi_{C_j}}{P(C_j)} = \varphi^{k-[\ln k]-1}(t_1, \ldots, t_r).$$

Подставляя выражение для $\varphi(t_1, \ldots, t_r)$ и устремляя k к бесконечности,

получаем соотношение

$$\psi(t_1, \ldots, t_r) \to e^{-\frac{1}{2}\sum_{p,q}\frac{b_{pq}}{\pi_p \pi_q} t_p t_q} \quad (k \to \infty)$$

Это доказывает (31). Лемма доказана.

Из лемм 3 и 5 вытекает, что величины τ_n и $\mu_n(l)$, введенные равенствами (25) и (26), удовлетворяют условиям леммы 1. Действительно, из леммы 5 следует, что при $n \to \infty$

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\widetilde{\zeta}\left(\frac{l_n}{c_n}\right)}{\sqrt{\frac{l_n}{c_n}}} \in U(\bar{x}) \;\middle|\; \widetilde{N}_n = \frac{l_n}{c_n}\right\} \Rightarrow G(\bar{x}),$$

какова бы ни была последовательность l_n, удовлетворяющая условиям: $\frac{l_n}{c_n}$ — целые числа и $l_n > \sigma_1$, где σ_1 произвольная положительная постоянная. Аналогично

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\widetilde{\zeta}\left(\left[\frac{n}{\mu}\right]\right)}{\sqrt{\left[\frac{n}{\mu}\right]}} \in U(\bar{x}) \;\middle|\; \widetilde{S}_{\left[\frac{n}{\mu}\right]} = n - b_n \mu^{-\frac{1}{\alpha}} l_n\right\} \Rightarrow G(\bar{x}), \quad (n \to \infty)$$

если $n - b_n \mu^{-\frac{1}{\alpha}} l_n$ целые числа и больше нуля.

Теперь, если в лемме 1 брать в качестве чисел σ_1 и σ_2 любые положительные числа при $\alpha < 1$, а при $\alpha > 1$ вообще любые действительные числа $-\infty < \sigma_1 < \sigma_2 < \infty$, то соотношение (9) будет выполняться для указанных величин τ_n, $\mu_n(l)$ и l_n. Ясно, что для любого $\delta > 0$ можно так выбрать σ_1 и σ_2, чтобы $V(\sigma_2) = V(\sigma_1) > 1 - \delta$. Соотношение (8) выполняется согласно лемме 3.

Итак, мы можем применить соотношения (10) и (11) к величинам τ_n и $\mu_n(l)$, введенным равенствами (25) и (26).

В случае $0 \leqslant \alpha < 1$ согласно (11)

$$\mathbf{P}\{\widetilde{N}_n c_n < x_0, \widetilde{\zeta}(\widetilde{N}_n)\sqrt{c_n} \in U(\bar{x})\} \underset{n\to\infty}{\Rightarrow} \int_{-\infty}^{x_0} G\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right) dV_\alpha(y). \tag{33}$$

В случае $1 < \alpha < 2$ из (10)

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\widetilde{S}_{\left[\frac{n}{\mu}\right]} - n}{b_n \mu^{-\frac{1}{\alpha}}} < x_0, \frac{\widetilde{\zeta}\left(\left[\frac{n}{\mu}\right]\right)}{\sqrt{\frac{n}{\mu}}} \in U(\bar{x})\right\} \underset{n\to\infty}{\Rightarrow} G(\bar{x}) V_\alpha(x_0), \tag{34}$$

§ 4. Доказательство теоремы (окончание)

Для окончания доказательства теоремы мы должны из справедливости соотношений (31) и (32) вывести справедливость соотношений (5) и (6) или в других обозначениях соотношений (5′) и (6′). Для этого, очевидно, достаточно доказать, что при $n \to \infty$ сходится к нулю, по ве-

роятности, каждая из следующих разностей: для $\alpha < 1$

$$\mathfrak{A}_n = \zeta_n \sqrt{c_n} = \tilde{\zeta}(\tilde{N}_n)\sqrt{c_n},\ \mathfrak{B}_n = N_n^0 c_n - \tilde{N}_n c_n,$$

для

$$\mathfrak{A}_n' = \frac{1}{\sqrt{n}}\zeta_n - \frac{1}{\sqrt{n}}\tilde{\zeta}\left(\left[\frac{n}{\mu}\right]\right),\ \mathfrak{B}_n' = \frac{\frac{1}{\mu}\tilde{S}_{\left[\frac{n}{\mu}\right]} - \frac{n}{\mu}}{b_n \mu^{-\frac{1+\alpha}{\alpha}}} + \frac{N_n^0 - \frac{n}{\mu}}{b_n \mu^{-\frac{1+\alpha}{\alpha}}}.$$

Оценим $\mathfrak{B}_n'$.

$$\left|\mathfrak{B}_n' \mu^{-\frac{1}{\alpha}}\right| = \left|\frac{\left(\tilde{S}_{\left[\frac{n}{\mu}\right]} - n\right) + (N_n^0 \mu - n)}{b_n}\right| \leqslant \frac{\left|\tilde{S}_{\left[\frac{n}{\mu}\right]} - \bar{S}_{\left[\frac{n}{\mu}\right]}\right|}{b_n} + \frac{\left|\bar{S}_{\left[\frac{n}{\mu}\right]} - \bar{S}_{\left[\frac{n}{\mu}\right]}\right|}{b_n} +$$

$$+ \left|\frac{S_{\left[\frac{n}{\mu}\right]} - \left[\frac{n}{\mu}\right]\mu}{b_n} - \frac{S_{N_n^0} - N_n^0 \mu}{b_n}\right| + \frac{\mu}{b_n} + \frac{\left|S_{N_n^0} - n\right|}{b_n}. \qquad (35)$$

Вследствие (19) первый член правой части сходится по вероятности к нулю. По лемме 2 второй член также сходится к нулю. Разность $n - S_{N_n^0}$ есть сумма отрезков времени от начала движения до первого попадания в e_0 и от последнего попадания в e_0 до n. Первая величина имеет определенное распределение и не зависит от n; вторая величина, как известно (см., например, [11]), имеет предельное распределение вероятностей при $n \to \infty$. Таким образом, последний член также бесконечно мал по вероятности.

Третий член есть сумма $\left|N_n^0 - \left[\frac{n}{\mu}\right]\right|$ одинаково распределенных независимых слагаемых $\frac{1}{b_n}\sum^*(\eta_k - \mu)$, причем Σ^* означает суммирование по k в пределах $\frac{n}{\mu} < k \leqslant N_n^0$, если $\frac{n}{\mu} < N_n^0$, и в пределах $N_n^0 < k \leqslant \frac{n}{\mu}$, если $N_n^0 < \frac{n}{\mu}$.

Для оценки этой суммы докажем следующую лемму.

Лемма 6. *Пусть* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *независимые, одинаково распределенные величины и*

$$\mathbf{P}\left(\frac{\sum_1^n \xi_k}{b_n} < x\right) \underset{n\to\infty}{\Rightarrow} V(x), \qquad (1)$$

где $V(x)$ *— собственный закон распределения. Тогда при* $\varepsilon_n \to 0$

$$\frac{1}{b_n}\max_{\gamma < \varepsilon_n n}\left|\sum_1^\gamma \xi_j\right| \to 0. * \qquad (2)$$

Доказательство. Пусть величины ξ_k' распределены так же, как ξ_k и независимы от них. Обозначим $\bar{\xi}_k = \xi_k - \xi_k'$. Имеем

$$\mathbf{P}\left\{\frac{1}{b_n}\max_{\gamma < \varepsilon_n n}\left|\sum_1^i \xi_j\right| > \delta\right\} \leqslant \mathbf{P}\left\{\frac{1}{b_n}\max_{\gamma < \varepsilon_n n}\left|\sum_1^\gamma \bar{\xi}_j\right| > \frac{\delta}{2}\right\} +$$

* Лемма сообщена нам А. Скороходом.

$$+\mathbf{P}\left\{\frac{1}{b_n}\max_{\gamma<\varepsilon_n n}\left|\sum_1^{\gamma}\xi_j\right|>\delta,\ \frac{1}{b_n}\max_{\gamma<\varepsilon_n n}\left|\sum_1^{\gamma}\bar{\xi}_j\right|\leqslant\frac{\delta}{2}\right\}. \tag{36}$$

Как известно (см., например, [4]), для симметрично распределенных величин $\bar{\xi}_j$

$$\mathbf{P}\left(\max_{\gamma<k}\left|\sum_1^{\gamma}\bar{\xi}_j\right|>y\right)\leqslant 2\mathbf{P}\left(\left|\sum_1^{k}\bar{\xi}_j\right|>y\right).$$

Поэтому первый член правой части (34) не больше, чем

$$2\mathbf{P}\left(\left|\sum_1^{\varepsilon_n n}\bar{\xi}_j\right|>\frac{\delta b_n}{2}\right). \tag{37}$$

Из того, что $V(x)$ — собственный закон распределения, следует (см. [6]), что его характеристическая функция имеет вид $e^{-C|t|^{\alpha}}$, где C зависит только от знака t ($\alpha>0$). Отсюда легко выводится, что для любого $\varepsilon>0$

$$\frac{b_{\varepsilon n}}{b_n}\to\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}\ (n\to\infty). \tag{38}$$

Действительно, предположим, что ε — целое число. Тогда для любого $t>0$

$$e^{C(it^{\frac{1}{\alpha}})^{\alpha}}=e^{Cit^{\alpha}}=\lim_{n\to\infty}\mathbf{M}\exp\left\{it\,\frac{1}{b_n}\sum_1^n\xi_j\right\}^{\varepsilon}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\mathbf{M}\exp\left\{it\,\frac{b_{\varepsilon n}}{b_n}\cdot\frac{1}{b_{\varepsilon n}}\sum_1^{\varepsilon_n}\xi_j\right\}=e^{C\left(t\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_{\varepsilon n}}{b_n}\right)^{\alpha}}.$$

Это доказывает (38) для целых ε. Деля почленно соотношения (38) для различных целых значений ε, докажем справедливость (38) для всякого рационального $\varepsilon>0$. Так как величины ξ_j независимы между собой, последовательность b_n можно, без ограничения общности, считать неубывающей. В силу этой монотонности b_n соотношение (38) распространяется на все $\varepsilon>0$.

Из монотонности b_n и соотношения (38) следует, что

$$\frac{b_n}{b_{n\varepsilon_n}}\to\infty\ (n\to\infty).$$

Величины $\frac{1}{b_{n\varepsilon_n}}\sum_1^{n\varepsilon_n}\bar{\xi}_j$ имеют предельное распределение, если $n\varepsilon_n\to\infty$. Поэтому величина (37) стремится к нулю при $n\to\infty$.

Займемся вторым членом правой части (36). Обозначив B_l, событие, состоящее в том, что $\max\limits_{\gamma<\varepsilon_n n}\left|\sum\limits_1^{\gamma}\xi_j\right|$ достигается при $\gamma=l$, мы можем записать второй член в виде

$$\sum_{l<\varepsilon_n n}\mathbf{P}\left\{\left|\sum_1^{l}\xi_j\right|>\delta\,b_n,\ \left|\sum_1^{l}\xi_j-\sum_1^{l}\xi'_j\right|\leqslant\frac{\delta b_n}{2},\ B_l\right\}.$$

Эта сумма не превосходит, очевидно, суммы

$$\sum_{l\leqslant\varepsilon_n n}\mathbf{P}\left\{B_l\left|\sum_1^l\xi_j\right|>\delta b_n\right\}\mathbf{P}\left(\left|\sum_1^l\xi_j'\right|>\frac{\delta b_n}{2}\right)\leqslant\max_{l\leqslant\varepsilon_n n}\mathbf{P}\left(\frac{1}{b_l}\left|\sum_1^l\xi_j'\right|>\frac{\delta b_n}{2b_l}\right).$$

Вследствие сходимости распределений величин $\frac{1}{b_k}\sum_1^l\xi_j'$ последняя величина стремится к нулю при $n\to\infty$. Лемма доказана.

В силу закона больших чисел для любого $\varepsilon\in\left(0,\frac{1}{\mu}\right)$

$$\mathbf{P}\left\{N_n^0<n\left(\frac{1}{\mu}-\varepsilon\right)\right\}=\mathbf{P}\left(S_{\left[n\left(\frac{1}{\mu}-\varepsilon\right)\right]}>n\right)=\mathbf{P}\left(\frac{S_{\left[n\left(\frac{1}{\mu}-\varepsilon\right)\right]}}{n\left(\frac{1}{\mu}-\varepsilon\right)}>\frac{\mu}{1-\varepsilon\mu}\right)\to 0$$

И точно так же $\mathbf{P}\left\{N_n^0>n\left(\frac{1}{\mu}+\varepsilon\right)\right\}\to 0$. Поэтому найдется такая последовательность $\varepsilon_n\to 0$, что

$$\mathbf{P}\left\{\left|N_n^0-\left[\frac{n}{\mu}\right]\right|>\varepsilon_n n\right\}\to 0\quad(n\to\infty).$$

Поэтому при достаточно больших n с вероятностью, сколь угодно близкой к 1,

$$\left|\frac{1}{b_n}\sum_k^*(\eta_k-\mu)\right|<\frac{1}{b_n}\max_{\gamma<2\varepsilon_n n};\left|\sum_{\left[\left(\frac{1}{\mu}-\varepsilon_n\right)n\right]+1}^{\left[n\left(\frac{1}{\mu}-\varepsilon\right)\right]+\gamma}(n_j-\mu)\right|.$$

Величины $\xi_k=\eta_k-\mu$ удовлетворяют условиям леммы 6, поэтому правая часть сходится к нулю по вероятности. Следовательно, третий член в неравенстве (35) бесконечно мал по вероятности. Для оценки $\mathfrak{B}_n$ докажем следующую лемму.

Лемма 7. *Пусть* $\overline{\xi}_n\geqslant\xi_n$ *и* $v(x)$ *— непрерывная функция распределения. Если* $\mathbf{P}(\xi_n>x)\Rightarrow V(x)$ *и* $\overline{\mathbf{P}}(\xi_n<x)\Rightarrow V(x)$, *то* $\xi_n-\xi_n\not\to 0$.

Доказательство. Для любых $\varepsilon>0$ и $\delta>0$ найдется такое l, что при больших n

$$\mathbf{P}\{\overline{\xi}_n-\xi_n>\varepsilon\}\leqslant\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathbf{P}\{(k-1)\varepsilon\leqslant\xi_n<k\varepsilon,\ \overline{\xi}_n>k\varepsilon\}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{-l}^{l}\mathbf{P}\{(k-1)\varepsilon\leqslant\xi_n<k\varepsilon,\ \overline{\xi}_n>k\varepsilon\}+\delta.$$

Но

$$\mathbf{P}\{(k-1)\varepsilon\leqslant\xi_n<k\varepsilon,\ \overline{\xi}_n>k\varepsilon\}<\mathbf{P}(\xi_n<k\varepsilon)-\mathbf{P}(\overline{\xi}_n<k\varepsilon)\underset{n\to\infty}{\to}0.$$

Поэтому $\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}(\xi_n-\xi_n>\varepsilon)<\delta$. Это доказывает лемму.

Если положить $\xi_n=N_n^0c_n$, $\overline{\xi}_n=\overline{N}_nc_n$, то эти величины будут удовлетворять условиям леммы 6 и поэтому

$$(N_n^0-\overline{N}_n)c_n\not\to 0.\qquad(39)$$

Вследствие (23) и $(N_n^0 - \widetilde{N}_n)\, c_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$.
Докажем, что $\mathfrak{A}_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$. Имеем

$$|\mathfrak{A}_n^l| = |\zeta_n^l - \overline{\zeta}^l(\widetilde{N}_n)|\sqrt{c_n} \leqslant \beta_n + \gamma_n + \delta_n, \text{ где}$$

$$\beta_n = |\widetilde{\zeta}^l(\widetilde{N}_n) - \zeta^l(\widetilde{N}_n)|\sqrt{c_n},$$

$$\gamma_n = |\zeta^l(\widetilde{N}_n) - \zeta^l(N_n^0)|\sqrt{c_n},$$

$$\delta_n = |\zeta^l(N_n^0) - \zeta_n^l|\sqrt{c_n}.$$

Оценим каждое слагаемое в отдельности. Согласно (24)

$$|\widetilde{\zeta}^l(k) - \zeta^l(k)| < ([\ln k] + 1) \max_{j \leqslant k} |\xi_j^l|.$$

Поэтому

$$\mathbf{P}(\beta_n > \varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(\widetilde{N}_n = k,\ \beta_n > \varepsilon) \leqslant \mathbf{P}\left(\widetilde{N}_n \geqslant \frac{M}{c_n}\right) +$$

$$+ \sum_{k < \frac{\mu}{c_n}} \mathbf{P}\left\{\widetilde{N}_n = k,\ |\widetilde{\zeta}^l(k) - \zeta^l(k)| > \frac{\varepsilon}{\sqrt{c_n}}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{P}\left(\widetilde{N}_n \geqslant \frac{M}{c_n}\right) + \mathbf{P}\left\{\left(l_n \frac{M}{c_n} + 1\right) \max_{j \leqslant \frac{M}{c_n}} |\xi_j^l| > \frac{\varepsilon}{\sqrt{c_n}}\right\}.$$

Бесконечная малость второго члена правой части при фиксированном M и $n \to \infty$ вытекает из существования $\mathbf{M}|\xi_j^l|^3$. Действительно, обозначив $\left[\frac{M}{c_n}\right] = k$, $\frac{\varepsilon\sqrt{k}}{\sqrt{M}(1 + \ln k)} = a_k$, получаем

$$\mathbf{P}(\max_{j \leqslant k} |\xi_j^l| > a_k) \leqslant k\mathbf{P}\left\{|\xi_j^l| > a_k\right\} \leqslant \frac{k}{a^3}\mathbf{M}|\xi_j^l|^3 \underset{k \to \infty}{\to} 0.$$

Выбирая M достаточно большим, можно сделать и первый член как угодно малым.

Далее, пользуясь формулой полной вероятности, получаем

$$\mathbf{P}(\gamma_n > \varepsilon) \leqslant \mathbf{P}\{(\overline{N}_n - N_n^0)\, c_n > \varepsilon_n\} + \mathbf{P}(\widetilde{N}_n \neq \overline{N}_n) +$$

$$+ \mathbf{P}\left(\gamma_n > \varepsilon,\ \widetilde{N}_n = \overline{N}_n,\ \overline{N}_n - N_n^0 < \frac{\varepsilon_n}{c_n}\right). \tag{40}$$

Согласно (39) мы можем выбрать последовательность $\varepsilon_n \to 0$ так, чтобы первый член в (40) был бесконечно малой величиной. Второй член также бесконечно мал. Оценим третий член γ_n'. Имеем

$$\gamma_n' \leqslant \mathbf{P}\left\{\left|\sum_{N_{n+1}^0}^{\overline{N}_n} \xi_j^l\right| \sqrt{c_n} > \varepsilon,\ N_n - N_n^0 < \frac{\varepsilon_n}{c_n}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{P}\left\{\left|\max_{k \leqslant \frac{\varepsilon_n}{c_n}} \sum_{j=i+1}^{i+k} \xi_j^l\right| \sqrt{c_n} > \varepsilon \,\middle|\, N_n^0 = i\right\} \cdot \mathbf{P}(N_n^0 = i).$$

Величины ξ_j^l при $j > i$ не зависимы от события $\{N_n^0 = i\}$. Поэтому условные вероятности в последней сумме равны соответствующим безусловным вероятностям. Окончательно

$$\gamma_n' = \mathbf{P}\left\{ \left| \max_{k \leqslant \frac{\varepsilon_n}{b_n}} \sum_{j=1}^{k} \xi_j^l \right| \sqrt{c_n} > \varepsilon \right\},$$

а по неравенству Колмогорова эта вероятность стремится к нулю при $n \to \infty$.

Для оценки δ_n заметим, что разность $\zeta_n^l - \zeta^l(N_n^0)$ есть сумма величины $\zeta_{S_1'}^l$, набранной от начала движения до начала первого цикла, и величины $\bar{\xi}_{N_n^0+1}^l$, набранной за время от начала (N_n^0+1)-го цикла до момента n. Первая величина $\zeta_{S_1'}^l$ имеет определенное распределение вероятностей и ввиду того, что $c_n \to 0$, $\zeta_{S_1'}^l \sqrt{c_n} \to 0$. Для второй величины вследствие (15) имеем $|\bar{\xi}_{N_n^0+1}^l| < C \max\limits_{0 \leqslant k \leqslant r} \nu_{N_n^0}^{(k)} + 1$, где C — некоторая константа, а $\nu_j^{(k)}$ — число попаданий в состояние l_k за время j-го цикла. Обычным приемом получаем

$$\mathbf{P}\left(|\bar{\xi}_{N_n^0+1}^l| \sqrt{c_n} > \varepsilon\right) \leqslant \mathbf{P}\left(N_n^0 + 1 > \frac{M}{c_n}\right) + \mathbf{P}\left(C \max_{j \leqslant \frac{M}{c_n}+1} \nu_j^{(k)} > \frac{\varepsilon}{\sqrt{c_n}} \right).$$

Точно так же, как при оценке γ_n, вследствие наличия третьего момента у величин $\nu_j^{(k)}$, получаем, что

$$\mathbf{P}\left(|\bar{\xi}_{N_n^0+1}^l| \sqrt{c_n} > \varepsilon\right) \underset{n \to \infty}{\to} 0.$$

Таким образом закончена оценка $\mathfrak{A}_n$.

Аналогично доказывается, что $\mathfrak{A}_n' \to 0$.

Как известно, сложение последовательности случайных величин, функции распределения которых сходятся, с последовательностью величин, бесконечно малых по вероятности, не нарушает сходимости функций распределения и не изменяет предела. Поэтому из (33) и (34) получаем утверждения теоремы.

Докажем справедливость утверждения, сделанного в замечании 2, § 1. Положим

$$\hat{\zeta}_n = \frac{\hat{N}_n}{\sum\limits_{1}^{r} a_k \pi_k + a_0} - N_n^0, \quad d_n = \begin{cases} \dfrac{1}{c_n}, & \alpha < 1, \\ b_n, & \alpha > 1. \end{cases}$$

Очевидно достаточно доказать, что $\dfrac{\hat{\zeta}_n}{d_n} \to 0 \; (n \to \infty)$. Разобьем величину $\hat{N}_n$ на величины $\xi_j = \Sigma a_k \nu_j^{(k)}$, набранные за один цикл, и обозначим $\hat{\zeta}(k) = \sum\limits_{j=1}^{k} \left(\dfrac{\hat{\xi}_j}{\sum\limits_{1}^{r} a_i \pi_i + a_0} - 1 \right)$.

Как и при оценке δ_n, получаем

$$\frac{\hat{\zeta}_n - \hat{\zeta}(N_n^0)}{d_n} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0 \quad (n \to \infty).$$

$\zeta(k)$ есть сумма одинаково распределенных величин с нулевым математическим ожиданием и конечной дисперсией. Поэтому тем же приемом, что и прежде, получаем для $\delta > 0$ и $a_n \to \infty$

$$\mathbf{P}\left(|\hat{\zeta}(N_n^0) c_n| > \varepsilon\right) \leqslant \mathbf{P}\left(N_n^0 > \frac{a_n}{c_n}\right) + \mathbf{P}\left(\frac{\max\limits_{k < \frac{a_n}{c_n}} |\hat{\zeta}(k)|}{\sqrt{\frac{a_n}{c_n}}} \sqrt{a_n c_n} > \varepsilon\right), \tag{41}$$

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{\hat{\zeta}(N_n^0)}{b_n}\right| > \varepsilon\right) \leqslant \mathbf{P}\left(N_n^0 > n^{1+\delta}\right) + \mathbf{P}\left(\frac{\max\limits_{k < n^{1+\delta}} |\hat{\zeta}(k)|}{n^{\frac{1+\delta}{2}}} \cdot \frac{n^{\frac{1+\delta}{2}}}{b_n} > \varepsilon\right). \tag{42}$$

Из определения b_n следует, что $\frac{n^\eta}{b_n} \underset{n \to \infty}{\to} 0$ для любого $\eta < \frac{1}{\alpha}$ (при $\alpha > 1$). Поэтому, если взять в неравенстве (41) в качестве a_n последовательность такую, что $a_n \to \infty$ и $a_n = o(c_n^{-1})$, а в неравенстве (42) положить $0 < \delta < \frac{2}{\alpha} - 1$, то правые части (41) и (42), согласно неравенству Колмогорова, будут стремиться к нулю при $n \to \infty$.

§ 5. Пример цепи Маркова, удовлетворяющей условиям теоремы

Рассмотрим возвратную неприводимую цепь Маркова, для которой $p_{ij} = p_{j-i}$ зависит только от разности $j - i$. Обозначим через ζ_n номер состояний, в котором находится система после n переходов, и положим $\xi_n = \zeta_n - \zeta_{n-1}$ (величина n-го перехода). Величины ξ_n независимы с общей функцией распределения $\mathbf{P}(\xi_k = k) = p_k$. Мы будем предполагать, что распределения $\zeta_n = \sum\limits_1^n \xi_k$ притягиваются к устойчивому закону с показателем $1 < \alpha < 2$:

$$\mathbf{P}\left(\frac{\zeta_n}{b_n} - a_n < x\right) \to G_\alpha(x). \tag{43}$$

Требование возвратности цепи при условии (43) эквивалентно условию $\mathbf{M}\xi_k = 0$ (см. [13]) и, значит, можно положить $a_n \equiv 0$. Чтобы доказать, что эта цепь удовлетворяет условиям теоремы § 1, надо найти асимптотику при $n \to \infty$ величин $c_n = 1 - F(n)$, где $F(x)$ — функция распределения времени возвращения.

Как известно (см., например, [7]),

$$\sum_{n=0}^{k} p_{00}^{(n)} c_n = 1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

(здесь положено $p_{00}^{(0)} = 1$). Отсюда вытекает соотношение для производящих функций $B(s) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} p_{00}^{(n)} s^n$ и $R(s) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n s^n$:

$$B(s)R(s) = \frac{1}{1-s}. \tag{44}$$

Сначала мы найдем асимптотику вероятностей $p_{00}^{(n)}$, а затем с помощью абелевой и тауберовой теорем выведем из равенства (44) асимптотику величин c_n.

Найдем асимптотику для $p_{00}^{(n)}$. Из требования неприводимости цепи следует, что общий наибольший делитель разностей $j-i$, для которых $p_{0i}>0$ и $p_{0j}>0$, равен 1. Применяя локальную предельную теорему (см. [6], стр. 255) к величинам ζ_n, получаем

$$b_n \mathbf{P}(\zeta_n = k) - g_\alpha\left(\frac{k}{b_n}\right) \underset{n\to\infty}{\to} 0,$$

где $g_\alpha(x)$ — плотность распределения $G_\alpha(x)$. Если $g_\alpha(0) \neq 0$, то это соотношение можно записать так:

$$p_{00}^{(n)} = \mathbf{P}(\zeta_n = 0) \sim \frac{g_\alpha(0)}{b_n}.$$

Докажем, что $g_\alpha(0) \neq 0$, если $1 < \alpha < 2$. Так как характеристическая функция закона $G_\alpha(x)$ есть

$$f(t) = \exp\left\{-c|t|^\alpha\left(1 + i\beta \operatorname{sgn} t \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\alpha\right)\right\}, \quad -1 \leqslant \beta \leqslant 1, \quad c>0,$$

то

$$g_\alpha(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-u}\cos\left(\beta \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\alpha u\right)\frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\alpha c^{\frac{1}{\alpha}}}\,du.$$

Этот интеграл выражается через Γ-функцию (см., например, [17], том II, стр. 812), и окончательно получаем

$$g_\alpha(0) = \frac{1}{\pi c^{\frac{1}{\alpha}}}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)\left(1+\beta^2\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{2}\alpha\right)^{-\frac{1}{2\alpha}}\cos\frac{1}{\alpha}\operatorname{arc}\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\alpha > 0.$$

Все рассуждения проходят для случая $\alpha = 1$, если распределения величин $\frac{\zeta_n}{b_n}$ притягиваются к устойчивому закону $G_1(x)$ с $g_1(0) \neq 0$. Так будет, например, в случае, когда величины переходов ξ_k имеют симметричное распределение и, следовательно, притягиваются к закону Коши.

Как было доказано (см. (38)), $b_n = n^{\frac{1}{\alpha}}h(n)$, где $h(n)$ — медленно-растущая функция, т. е. $\frac{h(cn)}{h(n)} \to 1$ при $n\to\infty$ для любого $c>0$. Докажем, что $p(y) = \sum\limits_{n\leqslant y} p_{00}^{(n)}$ обладает свойством: для любого $m>0$

$$\frac{P(my)}{P(y)} \to m^{1-\frac{1}{\alpha}}, \text{ т. е. } p(y) = y^{1-\frac{1}{\alpha}}h_1(y), \tag{45}$$

где $h_1(y)$ — некоторая медленно растущая функция.

Докажем это свойство для целых $m>0$. Тогда оно будет, очевидно,

верно для всех рациональных $m>0$, а вследствие монотонности $p(y)$ и для всех действительных $m>0$.

Так как цепь возвратна, то $\sum_1^\infty p_{00}^{(n)}=\infty$ (см. [7]) и, значит, $\sum_1^\infty \frac{1}{b_n}=\infty$. Поэтому

$$p(y)\sim g(0)\sum_{n\leqslant y}\frac{1}{b_n},\quad \frac{P(ym)}{p(y)}\sim\frac{\sum\limits_{n\leqslant y}\sum\limits_{k=1}^{m}\frac{1}{b_{mn+k}}}{\sum\limits_{n\leqslant y}\frac{1}{b_n}}.$$

Так как $\frac{1}{b_{nm+k}}\sim\frac{m^{-\frac{1}{\alpha}}}{b_n}$, то $\sum\limits_{k=1}^{m}\frac{1}{b_{mn+k}}\sim\frac{m^{1-\frac{1}{\alpha}}}{b_n}$ и $\frac{P(my)}{p(y)}\to m^{1-\frac{1}{\alpha}}$ $(n\to\infty)$.

При этом нетрудно доказать, что для $\alpha>1$ в соотношении (45)

$$p(y)\sim\frac{g_\alpha(0)}{\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)h(y)}y^{1-\frac{1}{\alpha}}.$$

По известной теореме Абеля (см., например, [9]), получаем

$$B(s)\sim\Gamma\left(2-\frac{1}{\alpha}\right)\frac{h_1\left(\frac{1}{1-s}\right)}{(1-s)^{1-\frac{1}{\alpha}}}.$$

Отсюда

$$R(s)\sim\frac{1}{\Gamma\left(2-\frac{1}{\alpha}\right)(1-s)^{\frac{1}{\alpha}}h_1\left(\frac{1}{1-s}\right)}.$$

По тауберовой теореме (см. [8], стр. 210) отсюда получаем асимптотику для $r(y)=\sum\limits_{n<y}c_n$:

$$r(y)\sim\frac{y^{\frac{1}{\alpha}}}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(2-\frac{1}{\alpha}\right)h_1(y)}.$$

Вследствие монотонности $r(y)$ легко доказать, что

$$c_n\sim\frac{1}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(2-\frac{1}{\alpha}\right)n^{1-\frac{1}{\alpha}}h_1(n)}.$$

Итак, $\frac{1-F(cx)}{1-F(x)}\to c^{-\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)}$, поэтому теорема § 1 применима к данной цепи. При этом асимптотику величин $c_n=1-F(n)$ можно вычислить более точно следующим образом:

1) $\alpha>1$ $c_n\sim C_\alpha\frac{b_n}{n}$, где $C_\alpha=\frac{1-\frac{1}{\alpha}}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(2-\frac{1}{\alpha}\right)g_\alpha(0)}$;

2) $\alpha = 1$ $c_n \sim \dfrac{C_1}{\sum\limits_1^n \dfrac{1}{b_k}}$, где $C_1 = \dfrac{1}{g_1(0)}$.

Из рассмотренного примера вытекает решение следующей задачи. Суммируются одинаково распределенные независимые целочисленные величины ξ_k с $\mathbf{M}\xi_k = 0$, распределения сумм которых $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$ сходятся к устойчивому закону с показателем $\alpha > 1$. Тогда для любой функции $f(x)$, равной нулю вне конечного интервала, находятся предельные распределения для сумм вида $\sum\limits_1^n f(S_k)$.

Аналогичная задача рассматривается Kallianpur'ом и Robbins'ом в [10]. Они находят предельные распределения для сумм $\sum\limits_1^n f(S_k)$, где $f(x)$ есть функция, суммируемая на всей прямой с $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \neq 0$ и S_k — суммы симметричных слагаемых, распределения которых притягиваются к устойчивому закону. Наши предположения более стеснительны в том отношении, что: 1) мы считаем $f(x)$ равной нулю вне конечного отрезка, 2) предполагаем слагаемые целочисленными. Но зато мы не предполагаем симметричности распределения слагаемых и не требуем, чтобы $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \neq 0$.

Поступила в редакцию
2. 7. 56

ЛИТЕРАТУРА

[1] W. Doeblin, Sur deux problèmes de Kolmogoroff, Bull. Soc. math. de France, 66 (1938), 210—220.
[2] W. Teller, Fluctuation theory of recurrent events, Franc. Am. Math. Soc., **67**, № 1 (1949).
[3] З. И. Шарагина, Локальные пред. теоремы для некоторых схем циклических процессов, Автореф. дисс. канд. физ.-мат. наук, Моск. гор. пед. ин-т, М. (1954).
[4] Р. Л. Добрушин, Две предельные теоремы для простейшего случайного блуждания по прямой, Усп. мат. наук, **X**, 3 (1955).
[5] Darling, The influence of the maximum term in the addition of independent random variables, Trans. Am. Math. Soc., **73**, № 1 (1952).
[6] А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.—Л., 1949.
[7] В. Феллер, Введение в теорию вероятностей и ее приложения, М., 1952.
[8] Г. Харди, Расходящиеся ряды, М., 1951.
[9] G. Dötsch, Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation, Berlin, 1937.
[10] Kallianpur and Robbins, The sequence of sums of independent random variables, Duke, Math. J., v. 21, № 2.
[11] J. Doob, Renewal theory from the point of view of theory of probability, Trans. A. M. S., **63**, № 3 (1948).
[12] А. Н. Колмогоров, Локальная предельная теорема для классических цепей Маркова, Изв. АН СССР, **13**, 4 (1949), 281.
[13] K. Chung and W. Fuchs. On the distribution of values of sums of random variables, Memoirs of the American Math. Soc., № 6 (1951), 12.

14] P. M. L e v y, Sur les séries dont les termes sont des variables éventuelles independantes. Studia, Math. 3 (1931), 119—155.
[15] С. Х. С и р а ж д и н о в, Предельные теоремы для однородных цепей Маркова, Ташкент, 1955.
[16] А. Н. К о л м о г о р о в, Основы теории марковских цепей с бесконечным множеством состояний, Бюл. ГУ, секц. А, I, 3 (1937).
[17] Г. М. Ф и х т е н г о л ь ц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, М. —Л., 1948.

A MULTIDIMENSIONAL LIMIT THEOREM FOR MARKOV CHAINS WITH A COUNTABLE SET OF STATES

V. A. VOLKONSKY

(*Summary*)

A homogeneous recurrent irreducible Markov chain with a countable set of states, $e_0, e_1, \ldots, e_n$ is considered. The limit distributions for $n \to \infty$ of the random vector $N_n = (N_n^0, \ldots, N_n^r)$ are investigated, where N_n^r is the number of strikes during n units of time in state e_r.

It is assumed that the distribution function $F(x)$ of the time for returning to th fixed state satisfies the condition that for any $c > 0$

$$\frac{1 - F(cx)}{1 - F(x)} \to c^{-\alpha}, \quad (x \to \infty) \tag{1}$$

for some $0 \leqslant \alpha < 2$, $\alpha \neq 1$. In this case it holds true that for some definite choice of affin transformations of an $(r+1)$-dimensional Euclidian space the distributions of vectors $A_n N_n$ converge to the undergenerate distribution on the $(r+1)$-dimensional space. The norming transformation A_n and the characteristic functions of the limit distributions can be written.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том II И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ *Выпуск 2*
1957

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УТОЧНЕНИЕ РЯДА ТЕОРЕМ ТЕОРИИ ВЕТВЯЩИХСЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

В. М. ЗОЛОТАРЕВ

1. Введение

Предметом рассмотрения настоящей заметки служит однородный по времени (время непрерывно) ветвящийся случайный процесс с одним типом частиц. Следуя статье Б. А. Севастьянова [1], мы будем в дальнейшем пользоваться следующими обозначениями: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n$ — производящая функция, задающая процесс ($p_0 dt$, $p_2 dt$, ...— вероятности образования из одной частицы за время dt соответственно 0,2,... частиц, — $p_1 dt$ — вероятность какого-либо изменения состояния частицы за время dt); $a = f'(1)$, $b = f''(1)$, $c = f'''(1)$ и т. д. — факториальные моменты функции $f(z)$; μ_t — число потомков одной частицы в момент времени t (мы считаем, что в начальный момент времени имелась одна частица);

$$P_n(t) = \mathbf{P}\{\mu_t = n\},\ (n = 0, 1, 2, \ldots);\quad F(t, z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) z^n;$$

$$S_t(y) = \mathbf{P}\{\mu_t < y \mid \mu_t > 0\};\ M^*(t) = \mathbf{M}\mu_t / Q(t),$$

где $Q(t) = 1 - P_0(t)$ — вероятность невырождения процесса к моменту времени t. О процессе говорят, что он выродился к моменту времени t, если $\mu_t = 0$. Вероятность вырождения процесса $P_0(t)$ имеет предел при $t \to \infty$, равный наименьшему неотрицательному корню уравнения $f(z) = 0$, который мы будем обозначать через λ. Из упоминавшейся уже работы Б. А. Севастьянова известно, что этот корень равен 1, если $a = f'(1) \leqslant 0$ и строго меньше 1, если $a > 0$.

В дальнейшем мы будем предполагать, что $p_0 > 0$ (а значит и $\lambda > 0$) и что процесс, с которым мы имеем дело, регулярен. Процесс называется *регулярным*, если для любых значений $t < \infty$ случайная величина μ_t конечна с вероятностью 1. Можно показать, что необходимым и достаточным условием регулярности процесса является расходимость для любых положительных ε интеграла *

$$\int_{1-\varepsilon}^{1} \frac{du}{f(u)}\,. \tag{1}$$

Классификация процессов проводится по величине adt среднего прироста числа частиц за время dt, причем различаются три случая

I) $a < 0$, II) $a = 0$, III) $a > 0$.

---

* Этот результат принадлежит Е. Б. Дынкину.

Основные результаты, относящиеся к процессам рассматриваемого типа, полученные Н. Колмогоровым [2], А. М. Ягломом [3] и Б. А. Севастьяновым [1], можно сформулировать в виде следующих двух теорем:

Теорема 1. *Для вырождающихся процессов при* $t \to \infty$

$$Q(t) \sim \begin{cases} Ke^{at}, & \text{если } a < 0 \text{ и } b < \infty; \\ \dfrac{2}{bt}, & \text{если } a = 0,\ b > 0 \text{ и } c < \infty. \end{cases}$$

Теорема 2. *При* $t \to \infty$ *функция* $S_t[yM^*(t)]$ *сходится к предельному распределению* $S(y)$, *которое описывается следующим образом:*

1° *Если* $a < 0$ *и* $b < \infty$, *то распределение* $S(y)$ *дискретно и производящая функция, соответствующая распределению* $S(y/K)$, *где постоянная* K *та же, что и в теореме* 1, *имеет вид*

$$F^*(x) = 1 - \exp\left\{ a \int_0^x \frac{du}{f(u)} \right\}. \tag{1}$$

2°. *Если* $a = 0$, $b > 0$ *и* $c < \infty$, *то*

$$S(y) = 1 - e^{-y},\ y \geqslant 0. \tag{2}$$

3°. *Если* $a > 0$ *и* $b < \infty$, *то характеристическая функция* $\psi(t)$ *распределения* $S(y)$ *имеет вид*

$$\psi(t) = \frac{u[(1-\lambda)t] - \lambda}{1 - \lambda},$$

где функция $u(t)$ *определяется из функционального уравнения*

$$(1-u)\exp\left\{ \int_1^u \frac{a(v-1) - f(v)}{(v-1)f(v)}\, dv \right\} + it = 0. \tag{3}$$

Незавершенность этих теорем видна с первого взгляда. Будут ли сохраняться асимптотические формулы теоремы 1 и вид предельных распределений теоремы 2, если отказаться от требования конечности моментов b и c. Если нет, то каковы необходимые и достаточные условия их справедливости и что нового появляется при таком отказе? Первая часть теоремы 2 позволяет, как легко видеть, получить асимптотические представления для вероятностей $P_n(t)$ при $t \to \infty$. Естественно интересоваться такими же представлениями для процессов двух других типов. Досадной деталью является отсутствие явного выражения для постоянной K. Разбору серии такого рода вопросов и посвящена настоящая заметка.

Несколько слов о методе, применяемом при решении всех этих вопросов. Известно (см., напр., [1]), что производящие функции $f(z)$ и $F(t, z)$ связаны следующим дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial F}{\partial t} = f(F), \tag{5}$$

которое решается при граничном условии $F(0, x) = x$. Метод, применявшийся предыдущими авторами, состоял в разложении правой части равенства (5) в ряд Тейлора и последующей оценке влияния вторых и третьих членов разложения на решение упрощенного дифференциального уравнения. Мы же будем отправляться от точного решения уравнения (5), заданного, правда, в неявной форме

$$\int_x^F \frac{du}{f(u)} = t. \tag{6}$$

Производящая функция $F^*(t, z)$, соответствующая распределению $S_t(y)$, очевидно,

может быть представлена в виде

$$F^*(t, z) = 1 - \frac{1 - F(t, z)}{1 - F(t, 0)} = 1 - \frac{R(t, z)}{Q(t)};$$

для функции $R(t, z)$, с которой нам удобнее будет иметь дело, уравнение (6) дает

$$t = \int_R^{1-z} \frac{du}{f(1-u)} = \int_Q^1 \frac{du}{f(1-u)}. \tag{7}$$

что эквивалентно

$$\Phi(z) = \int_0^z \frac{du}{f(u)} = \int_R^Q \frac{du}{f(1-u)}. \tag{8}$$

В дальнейшем нам понадобится понятие правильно меняющейся функции. *Правильно меняющейся* в точке 0 функцией (в смысле Карамата [4]) называется такая функция $g(x)$, для которой существует конечный, отличный от нуля предел ($x \to 0$):

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(kx)}{g(x)} = c(k) \tag{8}$$

при любом значении положительной постоянной k. Как показал Карамата [4], функция $g(x)$ может быть представлена в виде

$$g(x) = [A + \delta(x)]\, x^\gamma \exp\left\{\int_1^x \frac{\varepsilon(u)}{u}\, du\right\},$$

где $\delta(x)$ и $\varepsilon(x)$ стремятся к нулю при $x \to +0$, $A = \text{const}$ и γ — некоторое действительное число, называемое показателем правильно меняющейся функции. Если $\gamma = 0$, то функцию называют *медленно меняющейся*. Нетрудно видеть, что дифференцируемая правильно меняющаяся функция может быть представлена в виде

$$g(x) = g(1)\, x^\gamma \exp\left\{\int_1^x \frac{\varepsilon(u)}{u}\, du\right\}. \tag{9}$$

Лемма 1. *Дифференцируемая функция $g(x)$ будет правильно меняющейся в нуле с показателем γ тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{x \to +0} \frac{x g'(x)}{g(x)} = \gamma.$$

Доказательство. Необходимость указанного условия является следствием представления (9) функции $g(x)$. Достаточность получается столь же просто. Действительно, пусть $xg'(x) = [\gamma + \varepsilon(x)]\, g(x)$, где $\varepsilon(x) \to 0$ при $x \to 0$. Рассматривая это равенство как дифференциальное уравнение и решая его, мы приходим к представлению (9).

В заключение мы укажем на одно важное свойство правильно меняющейся функции с показателем γ, которое в дальнейшем нам понадобиться, именно, что $c(k) = k^\gamma$.

2. Асимптотическое поведение функции $Q_\lambda(t)$

В дальнейших теоремах большую роль будет играть функция $Q_\lambda(t) = \lambda - P_0(t)$, которая для вырождающихся процессов, очевидно, совпадает с функцией $Q(t)$. Поскольку точное выражение для функции $Q_\lambda(t)$ в общем случае получить не представляется возможным, то, продолжая результаты теоремы 1, мы будем искать для нее асимптотическое представление.

Теорема 3. *Если* $a<0$, *то существование интеграла*

$$q=-\int_0^1 \frac{au+f(1-u)}{uf(1-u)}\,du \tag{9}$$

является необходимым и достаточным условием справедливости асимптотического представления

$$Q(t)\sim Ke^{at}, \tag{10}$$

причем постоянная K *связана с* q *равенством* $q=\log K$.

Доказательство. После небольшого преобразования равенства (7) получаем

$$\log\left[e^{at}/Q(t)\right]=\int_Q^1 \frac{au+f(1-u)}{uf(1-u)}\,du=\log h(Q). \tag{11}$$

Предел правой части равенства при $t\to\infty$ существует в силу сходимости интеграла q. Связь постоянной K со значением интеграла q позволяет утверждать, что указанный признак является необходимым и достаточным.

Замечание 1. При дополнительном условии конечности некоторого количества факториальных моментов можно получить уточнение асимптотической формулы (10) тем же методом, что применялся при доказательстве теоремы 3. Например, предполагая, что $b<\infty$, можно показать справедливость равенства

$$Q(t)=Ke^{at}-\frac{b}{2a}K^2e^{2at}+o(e^{2at}). \tag{12}$$

В общем случае можно лишь сказать, что поправка к асимптотике, даваемая интегралом в правой части равенства (11), носит характер логарифма медленно меняющейся функции $h(Q)$ и, следовательно,

$$Qh(Q)=e^{at}. \tag{13}$$

Замечание 2. Известно, что для процессов второго и третьего типов условное среднее $M^*(t)\to\infty$ при $t\to\infty$. Поскольку, как показывает равенство (13), $M^*(t)=h(Q)$, то для процессов первого типа $M^*(t)\to\infty$ при $t\to\infty$ тогда, и только тогда, когда $q=-\infty$.

Теорема 4. *Если* $a=0$ *и* $f(1-x)$ *— правильно меняющаяся в нуле функция с показателем* $1<\gamma=1+\alpha\leqslant 2$, *то при* $t\to\infty$

$$t\sim\frac{Q(t)}{\alpha f(1-Q)}. \tag{14}$$

Доказательство. Используя правило Лопиталя, получаем

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\alpha t}{Q}f(1-Q)=\lim_{v\to\infty}\left\{\frac{\alpha f(1-v)}{v}\int_v^1\frac{du}{f(1-u)}\right\}=\lim_{v\to 0}\frac{\alpha}{-\dfrac{vf'(1-v)}{f(1-v)}-1}.$$

Последний предел, согласно лемме 1, существует и равен 1.

Замечание. В качестве следствия теоремы 4 получаем, что конечность второго момента является необходимым и достаточным условием асимптотического представления

$$Q(t)\sim\frac{2}{bt}. \tag{15}$$

Как и в случае $a<0$, дополнительные ограничения на факториальные моменты позволяют уточнить эту формулу. Так, если $c<\infty$, то, как нетрудно показать, используя (15) и (7),

$$Q(t)=\frac{2}{bt}+\frac{4c}{3b^3}\,\frac{\log t}{t^2}+o\left(\frac{\log t}{t^2}\right).$$

Случай $a > 0$ разбирается в основном так же, как и случай $a < 0$ с тем, однако, упрощением, что здесь асимптотическое разложение $Q_\lambda(t)$ уже зависит от производных функции $f(x)$ в точке $x = \lambda$ (по аналогии с факториальными моментами мы будем обозначать их a_λ, b_λ, и т. д.), которые все существуют.

Теорема 5. *Если $a > 0$, то при $t \to \infty$*

$$Q_\lambda(t) = K_\lambda e^{a_\lambda t} - \frac{b_\lambda}{2a_\lambda} K_\lambda^2 e^{2a_\lambda t} + O(e^{3a_\lambda t}), \tag{16}$$

где

$$K_\lambda = \lambda \cdot \exp\left\{ -\int_0^\lambda \frac{a_\lambda u + f(\lambda - u)}{u f(\lambda - v)}\, du \right\}.$$

Доказательство. Положим в (6) $x = 0$ и сделаем замену переменного $u = \lambda - v$, после чего (6) примет вид

$$t = \int_{Q_\lambda}^{\lambda} \frac{dv}{f(\lambda - v)}.$$

Дальнейшие рассуждения вполне аналогичны тем, что проводились в случае $a < 0$. Отметим, что в случае $a > 0$ представляется в принципе возможным получить асимптотическое разложение для функции $Q_\lambda(t)$ без каких-либо дополнительных предположений, поскольку все производные $f(x)$ в точке λ существуют.

3. Уточнение теоремы 2

Теорема 6. *Если $a < 0$, то $S_t(y)$ сходится при $t \to \infty$ к собственному дискретному распределению $S(y)$, производящая функция которого имеет вид*

$$F^*(x) = 1 - \exp\{a\Phi(x)\}. \tag{17}$$

Таким образом, утверждение теоремы 2 справедливо для всех процессов первого типа.

Доказательство. Нам, очевидно, достаточно будет показать, что предел отношения R/Q существует при $t \to \infty$ и равен $\exp\{a\psi(x)\}$; Согласно равенству (8)

$$\Phi(x) = \int_R^Q \frac{du}{f(1-u)}.$$

Функция $f(1-u)$ может быть разложена в ряд Тейлора и представлена в виде $f(1-u) = -au[1 + \varepsilon(u)]$, где $\varepsilon(u) \to 0$ при $u \to 0$. Применяя к правой части равенства теорему о среднем, получаем

$$\log(R/Q) = [a + \varepsilon(\theta)]\,\Phi(x), \qquad R \leqslant \theta \leqslant Q.$$

При $t \to \infty$ предел правой части существует и равен $a\Phi(x)$; значит, существует и равен тому же выражению предел левой части.

В следующих двух теоремах под характеристической функцией будет пониматься не преобразование Фурье, а преобразование Лапласа соответствующего распределения. Мы вправе это делать, поскольку все распределения, с которыми нам придется иметь дело, будут целиком сосредоточены на положительной полуоси.

В теореме 7 будет встречаться плотность устойчивого распределения $p(x, \alpha, 1)$ с параметрами $0 < \alpha < 1$, $\beta = 1$. Общее определение устойчивых распределений в нужной нам форме можно найти в [5], в нашем же частном случае эта плотность определяется уравнением

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} p(x, \alpha, 1)\, dx = \exp\{-(-it)^\alpha\}.$$

Теорема 7. *Если* $a = 0$ *и* $f(1-x)$ *— правильно меняющаяся в нуле функция с показателем* $1 < \gamma = 1 + \alpha \leqslant 2$, *то характеристическая функция* $\psi_t(s)$, *соответствующая распределению* $S_t(y/Q)$, *сходится при* $t \to \infty$ *к функции*

$$\psi(s) = 1 - s(1 + s^{\alpha})^{-1/\alpha}.$$

Соответствующая ей функция распределения имеет вид

$$S_{\alpha}(y) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\alpha}{\Gamma(1/\alpha)} \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-(x/u)^{\alpha}} p(u, \alpha, 1)\, du, & \text{если } 0 < \alpha < 1, \\ 1 - e^{-y}, & \text{если } \alpha = 1. \end{cases}$$

Доказательство. Полагая в равенстве (7) $z = e^{-sQ}$, $s > 0$, имеем

$$t = \int_R^{1-e^{-sQ}} \frac{du}{f(1-u)} = \int_{R/Q}^{(1-e^{-sQ})/Q} \frac{Q\,du}{f(1-Qu)}. \tag{18}$$

Домножаем обе части равенства (18) на $\dfrac{\alpha}{Q} f(1-Q)$ и переходим к пределу при $\to \infty$. Согласно теореме 4, предел слева существует и равен единице, следовательно, то же самое можно сказать и о правой части равенства. Так как $f(1-u)$ — правильно меняющаяся функция в точке ноль, то равномерно в любом конечном интервале $0 < \delta \leqslant u \leqslant \Delta < \infty$

$$\lim_{t \to \infty} \frac{f(1-Q)}{f(1-uQ)} = u^{-1-\alpha}.$$

В силу этого свойства существует конечный и отличный от нуля предел отношения R/Q при $t \to \infty$, равный $1 - \psi(s)$. Действительно, в противном случае, переходя к пределу по двум подпоследовательностям $\{t_j\}$, дающим различные и не равные нулю значения пределов $1 - \psi(s)$, мы получили бы для правой части различные числовые значения, что невозможно. Предельное значение $1 - \psi(s)$ не может также равняться нулю, так как в этом случае конечный предел справа можно было бы представить в виде

$$\alpha \int_{\delta}^{s} \frac{du}{u^{1+\alpha}} + \lim_{t \to \infty} \int_{R/Q}^{\delta} \frac{\alpha f(1-Q)}{f(1-uQ)}\, du,$$

где второе слагаемое неотрицательно для сколь угодно малых δ, а первое слагаемое при достаточно малых δ становится сколь угодно большим. Мы приходим, таким образом, к противоречию.

Переходя теперь к пределу в равенстве (18), получаем

$$1 = [1 - \psi(s)]^{-\alpha} - s^{-\alpha},$$

откуда для функции $\psi(s)$ находим выражение, приведенное в формулировке теоремы. Найдем вид функции $S_{\alpha}(y)$. Очевидно, что

$$1 - s(1 + s^{\alpha})^{-1/\alpha} = 1 - s \int_0^{\infty} e^{-sx} [1 - S_{\alpha}(x)]\, dx$$

и, значит,

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} [1 - S_{\alpha}(x)]\, dx = (1 + s^{\alpha})^{-1/\alpha}.$$

Нетрудно убедиться, что

$$\frac{1}{\Gamma(1/\alpha)} \int_0^{\infty} e^{-sx} \left(e^{-x} x^{\frac{1}{\alpha} - 1}\right) dx = (1+s)^{-1/\alpha}.$$

Используя это равенство и операционную формулу (см. [5]): если $\varphi(s) \doteqdot m(x)$ и $\varphi(s^\alpha) \doteqdot F_\alpha(x)$, то

$$F_\alpha(x) = \int_0^\infty u^{-1/\alpha} p(xu^{-1/\alpha},\ \alpha,\ 1)\, m(u)\, du,\ (0 < \alpha < 1),$$

мы получаем для функции $1 - S_\alpha(x)$ следующее выражение

$$1 - S_\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(1/\alpha)} \int_0^\infty e^{-u} p(xu^{-1/\alpha},\ \alpha,\ 1)\, \frac{du}{u},$$

чем и заканчивается доказательство теоремы.

Замечание 1. В теореме 7 исключается из рассмотрения случай правильно меняющейся функции с показателем $\gamma = 1$, так как для процессов этого типа вообще нельзя получить собственного предельного распределения $S(y)$, применяя только линейную нормировку случайной величины μ_t.

Замечание 2. При $a \neq 0$ или $a = 0$, $0 < b < \infty$, как легко видеть, функция $f(1-x)$ будет правильно меняющейся в нуле. Следовательно, для процессов второго типа условие $b < \infty$ является достаточным, а условие $\alpha = 1$, в классе правильно меняющихся функций, необходимым и достаточным для того, чтобы предельное распределение $S(y)$ было бы показательным.

Вопрос о существовании процессов второго типа, производящая функция которых не будет правильно меняющейся или будет иметь показатель $\gamma = 1$, остается открытым.

Теорема 8. *Если* $0 < a < \infty$, *то* $S_t(y/\sigma_t)$ *при* $t \to \infty$ *сходится к собственному предельному распределению* $S(y)$. *Нормирующая функция* σ_t *определяется из уравнения*

$$\int_{\frac{1-\lambda}{2}}^{\sigma_t} \frac{du}{f(1-u)} = t.$$

Характеристическая функция $\psi(s)$, *соответствующая распределению* $S(y)$, *имеет вид*

$$\psi(s) = \frac{V(s) - \lambda}{1 - \lambda},$$

где функция $V(s)$ *есть решение функционального уравнения*

$$a \int_{\frac{1+\lambda}{2}}^{V} \frac{du}{f(u)} = \log s.$$

Доказательство. Выберем σ_t так, как это указано в формулировке теоремы, и положим в равенстве (7) $z = e^{-s\sigma_t}$, тогда, обозначая через $\theta_s = (1 - e^{-s\sigma_t})\, s\sigma_t$, получим

$$\int_R^{\frac{1-\lambda}{2}} \frac{du}{f(1-u)} = 1 - \int_{\frac{1-\lambda}{2}}^{\theta_r \cdot s\sigma_t} \frac{du}{f(1-u)} \int_{\theta_s \cdot s\sigma_t}^{\sigma_t} \frac{du}{f(1-u)}.$$

Применяя теперь теорему о среднем, находим

$$\int_R^{\frac{1-\lambda}{2}} \frac{du}{f(1-u)} = \frac{\log(s \cdot \theta_s)}{a\,[1 + \varepsilon(\vartheta\sigma_t)]},\quad s \cdot \theta_s \leqslant \vartheta \leqslant 1. \tag{19}$$

Предел справа существует и равен $\frac{1}{a}\log s$, следовательно, существует и предел левой части равенства. Рассуждения, аналогичные тем, что приводились в теореме 7, показывают, что $\lim\limits_{t\to\infty}(1-R)=V(s)$ существует и отличен от нуля. Формальный переход к пределу в равенстве (19) завершает доказательство.

Замечание 1. В случае регулярного процесса со значением $a=\infty$ происходит настолько быстрый рост величины μ_t (при условии, что $\mu_t>0$), что никакая линейная нормировка уже не в состоянии уравновесить этот рост. Примером может служить процесс с производящей функцией

$$f(x)=(1-x)\,[1+\log(1-x)],$$

для которого функция $F(t,x)$ находится в явном виде:

$$F(t,x)=1-\exp\{-(1-e^{-t})+e^{-t}\log(1-x)\}.$$

Замечание 2. Как видно из теоремы 2, в качестве нормирующей функции σ_t иногда можно брать функцию Ae^{-at}, где A — некоторая положительная постоянная. Нетрудно показать, что необходимым и достаточным условием такого выбора является конечность интеграла

$$L=\int_0^{\frac{1-\lambda}{2}}\frac{au+f(1-u)}{uf(1-u)},$$

причем $\sigma_t\sim Ae^{-at}$, если $A=\frac{1-\lambda}{2}\,e^{-L}$.

4. Асимптотическое поведение вероятностей $P_n(t)$

В этом разделе нам понадобятся следующие две леммы.

Лемма 2. *Для процессов всех типов функция*

$$\Phi(z)=\int_0^z\frac{du}{f(u)}$$

является аналитической в круге $|z|<\lambda$.

Доказательство. Утверждение леммы является следствием леммы 2 работы автора [6], согласно которой производящая функция $f(z)$ имеет в круге $|z|\leqslant 1$ только положительные нули.

Лемма 3. *Если внутри некоторого круга* $|z|<r$ *аналитическая функция* $G_t(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(t)z^n$ *сходится при* $t\to\infty$ *к аналитической в том же круге функции* $G(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$, *то для всех значений* n $a_n(t)\to a_n$ *при* $t\to\infty$.

Доказательство леммы в виду его элементарности мы опускаем.

Следствием теоремы 6 и приведенных двух лемм является следующее асимптотическое представление вероятностей $P_n(t)$ при больших значениях t:

$$P_n(t)\sim c_nQ(t),\ (n\geqslant 1);$$

здесь постоянные c_n определяются как коэффициенты разложения

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_nz^n=1-\exp\{a\Phi(z)\}.$$

Если предположить дополнительно, что $b<\infty$, то асимптотическую формулу для

$P_n(t)$ можно уточнить следующим образом:

$$P_n(t) = c_n K e^{at} - \frac{b}{2a} d_n K^2 e^{2at} + o(e^{2at}), \tag{20}$$

где d_n задаются равенством

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n z^n = 1 - \exp\{2a\Phi(z)\}.$$

Аналогичные асимптотические представления вероятностей $P_n(t)$ могут быть получены также и для остальных типов процессов.

Теорема 9. *Если $a = 0$ и $f(1-x)$ — правильно меняющаяся функция с показателем $1 < \gamma = 1 + \alpha \leqslant 2$, то при $t \to \infty$*

$$P_n(t) \sim \frac{c_n}{\alpha t} Q(t),$$

где c_n определяются равенством

$$\sum_{n\ 1}^{\infty} c_n z^n = \Phi(z).$$

Доказательство. В равенстве (8) делаем замену переменного $u = (1-v)Q(t)$, после чего получаем

$$\Phi(z) = \frac{Q}{t} \int_0^{t \cdot F^*(t,z)} \frac{dv}{f\left[1 - \left(1 - \frac{v}{t}\right) Q\right]}.$$

Согласно теореме 4, $Q/t \sim \alpha f(1-Q)$, откуда при $t \to \infty$

$$\Phi(z) \sim \alpha \int_0^{tF^*(t,z)} \frac{f(1-Q)\,dv}{f\left[1 - \left(1 - \frac{v}{t}\right) Q\right]} \sim \alpha t \cdot F^*(t,z), \tag{21}$$

поскольку $f(1-u)$ по предположению правильно меняющаяся функция и $0 < \delta = 1 - F^*(t_0, z) < 1 - \frac{v}{t} < 1$ для достаточно больших t. Соотношение (21) показывает, что предел $t \cdot F^*(t, z)$ при $t \to \infty$ существует и равен $\frac{1}{\alpha} \Phi(z)$. Применяя теперь леммы 2 и 3, мы приходим к утверждению теоремы.

Замечание. Если $b < \infty$, то, очевидно,

$$P_n(t) \sim c_n \frac{2}{bt^2}.$$

При дополнительном предположении конечности третьего момента c можно получить следующее уточнение этой асимптотической формулы

$$P_n(t) \sim c_n \left[\frac{2}{bt^2} - \frac{4c}{3b^3} \frac{\log t}{t^3}\right] + o\left(\frac{\log t}{t^3}\right).$$

Теорема 10. *Если $a > 0$, то при $t \to \infty$ имеет место следующее асимптотическое разложение*

$$P_n(t) \sim c_n K_\lambda e^{a_\lambda t} - \frac{b_\lambda}{2a_\lambda} d_n K_\lambda^2 e^{2a_\lambda t} + \ldots,$$

где постоянные c_n и d_n определяются из равенств

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n = 1 - \exp\{a_\lambda \Phi(z)\}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n z^n = 1 - \exp\{2a_\lambda \Phi(z)\}.$$

Доказательство теоремы проводится почти так же, как и в случае $a < 0$. Однако здесь мы уже можем говорить об асимптотическом разложении без каких-либо дополнительных предположений, поскольку все моменты a_λ, b_λ, ... и т. д. существуют. Заметим, что в этой теореме, в отличие от теоремы 8, не предполагается конечности a, т. е. она справедлива для всех процессов третьего типа.

5. Примеры процессов с бесконечными моментами

В качестве иллюстрации к доказанным теоремам приведем несколько примеров процессов, не подпадающих под действие теоремы 2, и для которых производящая функция $F(t, z)$ находится в явном виде. Для процессов всех типов вид производящей функции $f(z)$, задающей процесс, общий: $f(z) = a(z-1) + c(1-z)^{1+\alpha}$, где $0 < \alpha < 1$ и $c > \max(0, a)$.

1°. $a = 0$. Для этого случая

$$F(t, z) = 1 - [\alpha c t + (1-z)^{-\alpha}]^{-1/\alpha}$$

и

$$P_n(t) \sim \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n+1)\Gamma(1+\alpha)} (\alpha c t)^{-1-1/\alpha}.$$

2°. $a \neq 0$. В этом случае

$$F(t, z) = 1 - \left[\frac{c}{a}(1 - e^{-\alpha a t}) + e^{-\alpha a t}(1-z)^{-\alpha}\right]^{-1/\alpha}$$

и

$$P_n(t) \sim \begin{cases} \left(\frac{a}{c}\right)^{1+1/\alpha} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)} e^{-\alpha a t}, & \text{если } a > 0, \\ \left(1 - \frac{c}{a}\right)^{-1/\alpha} c_n e^{a t}, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Коэффициенты c_n определяются из разложения по степеням x функции

$$1 + (x-1)\left(\frac{c-a}{c(1-x)^\alpha - a}\right)^{1/\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n.$$

Поступила в редакцию
27. 3. 57

ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. А. Севастьянов, Теория ветвящихся случайных процессов, Успехи матем. наук, 6, вып. 6 (1951), 47—99.
[2] А. Н. Колмогоров, К решению одной биологической задачи, Изв. НИИ матем. и мех. Томск. гос. ун-та., 2, вып. 1 (1938), 1—12.
[3] А. М. Яглом, Некоторые предельные теоремы теории ветвящихся случайных процессов, ДАН СССР, 56, № 8 (1947), 795—798.
[4] I. Karamata, Bull. Soc. math. de France, v. 61 (1933).
[5] В. М. Золотарев, Об аналитических свойствах устойчивых законов распределения, Вестн. Ленингр. унив., № 1 (1956), 50—53.
[6] В. М. Золотарев, Об одной задаче из теории ветвящихся случайных процессов, Успехи матем. наук, 9, вып. 2 (1954), 147—156.

MORE EXACT STATEMENTS OF SEVERAL THEOREMS IN THE THEORY OF BRANCHING PROCESSES

V. M. ZOLOTAREV (*MOSCOW*)

(*Summary*)

Theorems proved by A. N. Kolmogorov [2], A. M. Yaglom [3] and B. A. Sevastjanov [1] on regular branching processes with particles of one type homogeneous in time (parameter t being continuous) are made more exact. It is possible to do away with the requirement that the second and third factorial moments be finite in the integral limit theorems. For processes with $a = f'(1) \neq 0$, the form of limit theorems is the same as before. For processes with $a = 0$, it is necessary to require in addition that the producing function determining the branch process be properly variable in the sense of Karamata [4] with the index $\gamma = 1 + \alpha > 1$. In this case, a new class of distributions appears as the limit laws. The Laplace transforms for these distributions have a very simple form

$$\psi(s) = 1 - s(1 + s^{\alpha})^{-1/\alpha}, \quad 0 < \alpha \leqslant 1.$$

The limit distributions of this class $S_{\alpha}(y)$ may be expressed by means of the densities of stable distributions $p(x, \alpha, \beta)$ with the parameters $0 < \alpha < 1$ and $\beta = 1$ as follows:

$$S_{\alpha}(y) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\alpha}{\Gamma(1/\alpha)} \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-(y/u)^{\alpha}} p(u, \alpha, 1) \frac{du}{u} & \text{for } 0 < \alpha < 1 \\ 1 - e^{-y}, & \text{for } \alpha = 1 \end{cases}$$

The asymptotic behavior of the probability $Q(t)$ that the process will degenerate and the probabilities $P_n(t)$ that at moment t there will be just n particles ($n \geqslant 1$) is also made more exact.

КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ПРИМЕСЕЙ

В. Н. КЛИМОВ

1. Пусть $n(t, \vec{r}, \vec{v})\, d\vec{r}\, d\vec{v}$ — число однотипных частиц в элементарном объеме $d\vec{r} = dxdydz$ возле точки $\vec{r}$, в скоростном элементе $d\vec{v} = dv_x dv_y dv_z$ возле значения скорости $\vec{v}$, в момент t. Частицы находятся под воздействием внешнего силового поля, которое создает ускорение $\vec{a}(t, \vec{r}, \vec{v})$ для частиц, проходящих точку $\vec{r}$ в момент t со скоростью $\vec{v}$. Кроме того, каждая частица, подвержена вероятностным актам рассеяния и поглощения, причем для частицы, прошедшей точку $\vec{r}$ в момент t со скоростью $\vec{v}$, величина $\Gamma(t, \vec{r}, \vec{v}; \vec{v}')\, d\vec{v}'dt$ выражает вероятность перейти, вследствие рассеяния за время dt, в одно из скоростных состояний $\vec{v}'$ элемента $d\vec{v}'$, величина $\lambda_s(t, \vec{r}, \vec{v})\, dt = dt \displaystyle\int_{(\vec{v}')} \Gamma(t, \vec{r}, \vec{v}; \vec{v}')\, d\vec{v}'$ — вероятность акта рассеяния и $\lambda_c(t, \vec{r}, \vec{v})\, dt$ — вероятность поглощения за время dt. Баланс числа частиц в элементе $d\vec{r}\, d\vec{v}$ выражается соотношением:

$$n(t, \vec{r}, \vec{v})\, d\vec{r}\, d\vec{v} = n(t - dt, \vec{r} - \vec{v}dt, \vec{v} - \vec{a}dt)\, d(\vec{r} - \vec{v}dt)\, d(\vec{v} - \vec{a}dt) -$$

$$- n(t, \vec{r}, \vec{v})\, d\vec{r}\, d\vec{v} \cdot [\lambda_c(t, \vec{r}, \vec{v}) + \lambda_s(t, \vec{r}, \vec{v})]\, dt +$$

$$+\int\limits_{(\vec{v}')} n(t,\vec{r},\vec{v}')\,d\vec{r}\,d\vec{v}'\cdot\Gamma(t,\vec{r},\vec{v}';\vec{v})\;d\vec{v}\,dt+q(t,\vec{r},\vec{v})\,d\vec{r}\,d\vec{v}\,dt+o(d\vec{r}\,d\vec{v}\,dt), \qquad (1)$$

де интегрирование по $d\vec{v}'$ выполнено по всему пространству скоростей $\vec{v}'$; $(t,\vec{r},\vec{v})\,d\vec{r}\,d\vec{v}\,dt$ — количество частиц рассматриваемого типа, вновь испущенных в элемент $d\vec{v}'$ источниками в объеме $d\vec{r}$ за время dt. Обозначая через $\dfrac{\partial\vec{a}}{\partial\vec{b}}$ квадратную матрицу, составленную из $\dfrac{\partial a_x}{\partial b_x}$, $\dfrac{\partial a_x}{\partial b_y}$, ..., $\dfrac{\partial a_z}{\partial b_z}$, через $\hat{1}$ — единичную трехрядную матрицу, через Det_k — детерминант k-го порядка, имеем:

$$\frac{\partial(\vec{r}-\vec{v}dt,\ \vec{v}-\vec{a}dt)}{\partial(\vec{r},\ \vec{v})}=\mathrm{Det}_6\begin{vmatrix}\hat{1} & -dt\cdot\hat{1}\\ -\dfrac{\partial\vec{a}}{\partial\vec{r}}\,dt\,\hat{1} & \hat{1}-\dfrac{\partial\vec{a}}{\partial\vec{v}}\,dt\end{vmatrix}=\mathrm{Det}_3\left|\hat{1}-\frac{\partial\vec{a}}{\partial\vec{v}}\,dt-\frac{\partial\vec{a}}{\partial\vec{r}}\,dt^2\right|=$$

$$=1-\left(\frac{\partial a_x}{\partial v_x}+\frac{\partial a_y}{\partial v_y}+\frac{\partial a_z}{\partial v_z}\right)dt+O(dt^2). \qquad (2)$$

Выделяя из $n(t-dt,\ \vec{r}-\vec{v}dt,\ \vec{v}-\vec{a}dt)$ члены, линейные в dt, и выражая элемент $d(\vec{r}-\vec{v}dt)\,d(\vec{v}-\vec{a}dt)$ через $d\vec{r}\,d\vec{v}$ с помощью (2), вместо (1) получаем:

$$\left\{\frac{\partial n(t,\vec{r},\vec{v})}{\partial t}+\vec{v}\,\mathrm{grad}_{\vec{r}}\,n+\vec{a}\,\mathrm{grad}_{\vec{v}}\,n+n\,\mathrm{div}_{\vec{v}}\,\vec{a}+[\lambda_c(t,\vec{r},\vec{v})+\lambda_s(t,\vec{r},\vec{v})]\,n-\right.$$

$$\left.-\int\limits_{(\vec{v}')}\Gamma(t,\vec{r},\vec{v}';\vec{v})\,n(t,\vec{r},\vec{v}')\,d\vec{v}'-q(t,\vec{r},\vec{v})\right\}d\vec{r}\,d\vec{v}\,dt=o(d\vec{r}\,d\vec{v}\,dt), \qquad (3)$$

откуда, ввиду произвольности $d\vec{r}\,d\vec{v}\,dt$, вытекает формальная схема кинетического уравнения:

$$\frac{\partial n(t,\vec{r},\vec{v})}{\partial t}+\vec{v}\,\mathrm{grad}_{\vec{r}}\,n+\mathrm{div}_{\vec{v}}\,(\vec{a}n)+[\lambda_c(t,\vec{r},\vec{v})+\lambda_s(t,\vec{r},\vec{v})]\,n=$$

$$=\int\Gamma(t,\vec{r},\vec{v}';\vec{v})\,n(t,\vec{r},\vec{v}')\,d\vec{v}'+q(t,\vec{r},\vec{v}), \qquad (4)$$

описывающего изменение во времени функции распределения $n(t,\vec{r},\vec{v})$.

2. В обычных условиях достаточно учитывать лишь парные столкновения частиц. При этом величина $\Gamma(t,\vec{r},\vec{v};\vec{v}')$ линейна в плотностях всех частиц, составляющих среду, включая частицы рассматриваемого типа, так как уравнение (4), вообще говоря, квадратично в $n(t,\vec{r},\vec{v})$. Специальный случай имеет место при изучении кинетики частиц, поступающих в среду в незначительных количествах, когда учитывать их взаимодействие друг с другом излишне. Примером может служить распространение нейтронов и заряженных частиц, не содержащихся в исходном веществе и возникающих в нем в результате ядерных реакций. Уравнение (4), определяющее функцию распределения $n(t,\vec{r},\vec{v})$ для таких частиц, оказывается линейным, а вероятности переходов $\Gamma(t,\vec{r},\vec{v};\vec{v}')$, $\lambda_s(t,\vec{r},\vec{v})$, $\lambda_c(t,\vec{r},\vec{v})$ выражаются только через параметры среды, в качестве которых можно взять объемную плотность числа частиц $N(t,\vec{r})$, их температуру $T(t,\vec{r})$ и скорость гидродинамического смещения $\vec{C}(t,\vec{r})$, установленные для каждой компоненты исходного вещества в зависимости от времени и места путем решения отдельной задачи.

Формально мы будем учитывать частицы среды лишь одного сорта; полные вероятности переходов получаются суммированием аналогичных выражений по всем компонентам вещества.

3. Пусть $\vec{v}$ — скорость рассеиваемой частицы данного типа и $\vec{V}$ — скорость рассеивающей частицы среды перед их взаимодействием; $\Delta N \cdot d\vec{r}$ — число частиц среды со скоростью $\vec{V}$ в объеме $d\vec{r}$. Тогда $|\vec{v} - \vec{V}| \Delta N \cdot d\sum dt$ выражает число частиц среды со скоростью $\vec{V}$, идущих за время dt навстречу данной частице через любую площадку $d\sum$, перпендикулярную к потоку. Пусть известна величина:

$$d\sum_s = \mathfrak{S}(\vec{v}, \vec{V}; \vec{v}')\, d\vec{v}' \qquad (5)$$

— записанное в лабораторной системе отсчета эффективное поперечное сечение, на которое должна попасть данная частица со скоростью $\vec{v}$, чтобы рассеяться на частице среды со скоростью $\vec{V}$ и приобрести новую скорость $\vec{v}'$ из элемента $d\vec{v}'$. В силу сохранения суммарного импульса скорость частицы среды после рассеяния $\vec{V}'$ выражается через $\vec{v}, \vec{V}, \vec{v}'$ и поэтому в число аргументов $\mathfrak{S}(\vec{v}, \vec{V}; \vec{v}')$ не входит. Если под площадкой $d\sum$ понимать такое эффективное сечение $d\sum_s$, то величина $|\vec{v} - \vec{V}| \Delta N \cdot d\sum_s dt$ дает вероятность перехода частицы со скоростью $\vec{v}$ в элемент $d\vec{v}'$ за счет рассеяния на одной из частиц среды со скоростью $\vec{V}$ за время dt.

Пусть теперь задана вероятность $F(t, \vec{r}, \vec{V})\, d\vec{V}$ того, что частица среды, проходящая точку $\vec{r}$ в момент t, обладает скоростью $\vec{V}$ из элемента $d\vec{V}$; $\int F(t, \vec{r}, \vec{V})\, d\vec{V} = 1$. Тогда следует положить $\Delta N = N(t, \vec{r}) F(t, \vec{r}, \vec{V}) d\vec{V}$, и по определению величины $\Gamma(t, \vec{r}, \vec{v}; \vec{v}')\, d\vec{v}'\, dt$ получаем:

$$\Gamma(t, \vec{r}, \vec{v}; \vec{v}') = N(t, \vec{r}) \int |\vec{v} - \vec{V}|\, \mathfrak{S}(\vec{v}, \vec{V}; \vec{v}')\, F(t, \vec{r}, \vec{V})\, d\vec{V} \qquad (6)$$

с интегрированием по всему пространству скоростей $\vec{V}$.

4. Эффективное сечение для рассеяния обычно задается в системе центра инерции (ЦИ) сталкивающихся частиц. Скорости частиц, взятые в системе ЦИ, будем отмечать индексом 1: рассеиваемая частица переходит из состояния $\vec{v}_1$ в состояние $\vec{v}_1'$, рассеивающая — из $\vec{V}_1$ в $\vec{V}_1'$. Если масса рассеиваемой частицы m, а рассеивающей — Mm, где M — безразмерное отношение масс, то по определению системы ЦИ имеем $\vec{v}_1 + M\vec{V}_1 = 0$, $\vec{v}_1' + M\vec{V}_1' = 0$. Таким образом, скорости сталкивающихся частиц в системе ЦИ могут изменяться по модулю лишь в пропорции, одинаковой для обеих частиц. Если же рассеяние происходит упруго, то модули скоростей остаются неизменными, $v_1' = v_1$, $V_1' = V_1$, чтобы суммарная кинетическая энергия была сохранена. Из $\vec{v}_1 + M\vec{V}_1 = 0$ следует:

$$\vec{v}_1 = \frac{M}{1+M}(\vec{v}_1 - \vec{V}_1) = \frac{M}{1+M}(\vec{v} - \vec{V}), \qquad (7)$$

где во втором равенстве разность скоростей, не зависящая от системы отчета, записана в лабораторной системе.

Ввиду неизменности $v_1 = v_1'$, дифференциальное эффективное сечение для упругого рассеяния относится не к полному скоростному элементу $d\vec{v}_1'$, а только к элементу телесного угла $d\vec{\omega}_1'$, связанному с $d\vec{v}_1'$ соотношением $d\vec{v}_1' = v_1'^2 dv_1' d\vec{\omega}_1'$; телесный угол $d\vec{\omega}_1'$ подразумевается взятым в окрестности орта $\vec{\omega}_1' = \frac{\vec{v}_1'}{v_1'}$. Пусть эффективное

сечение для упругого рассеяния задано в виде:

$$d\sigma_s = s_1(\vec{v}, \vec{V}; \vec{v}')\, d\vec{\omega}_1', \quad v_1' = v_1, \tag{8}$$

где индекс 1 у коэффициента s_1 указывает на его соответствие телесному углу $d\vec{\omega}_1'$ в системе ЦИ; между аргументами $s_1(\vec{v}, \vec{V}; \vec{v}')$, записанными в лабораторной системе, имеется связь, выраженная равенством $v_1'(\vec{v}, \vec{V}; \vec{v}') = v_1(\vec{v}, \vec{V}; \vec{v}')$.

В случае рассеяния нейтронов на ядрах интегральное эффективное сечение $\sigma_s = \int d\sigma_s$ конечно и зависит, вообще говоря, от модуля относительной скорости сталкивающихся частиц. Известно, кроме того, что упругое рассеяние происходит изотропно в системе центра инерции нейтрона и ядра. Поэтому для упругого рассеяния нейтронов:

$$d\sigma_s = \sigma_s(|\vec{v}_1 - \vec{V}_1|)\frac{d\vec{\omega}_1'}{4\pi}, \tag{9}$$

или, согласно (8):

$$s_1(\vec{v}, \vec{V}; \vec{v}') = \frac{1}{4\pi}\sigma_s(|\vec{v} - \vec{V}|). \tag{10}$$

Индексы 1 у разности скоростей опущены, подобно (7). Функция $\sigma_s(|\vec{v} - \vec{V}|)$ задается на основе эксперимента.

В случае упругого рассеяния заряженных частиц, по формуле Резерфорда:

$$d\sigma_s = \frac{z^2Z^2e_0^4}{m_0^2|\vec{v}_1 - \vec{V}_1|^4}\frac{d\vec{\omega}_1'}{(1 - \vec{\omega}_1\cdot\vec{\omega}_1')^2}, \tag{11}$$

где ze_0, Ze_0 — заряды рассеиваемой и рассеивающей частиц, выраженные через элементарный заряд e_0; $m_0 = \frac{m\cdot Mm}{m+Mm} = \frac{M}{1+M}m$ — приведенная масса; $\vec{\omega}_1 = \frac{\vec{v}_1}{v_1}$, $\vec{\omega}_1' = \frac{\vec{v}_1'}{v_1'}$ — орты соответствующих скоростей. В силу $v_1' = v_1$ и (7), имеем:

$$(\vec{v}_1' - \vec{v}_1)^2 = 2v_1^2(1 - \vec{\omega}_1\cdot\vec{\omega}_1') = 2\left(\frac{M}{1+M}\right)^2|\vec{v}_1 - \vec{V}_1|^2(1 - \vec{\omega}_1\cdot\vec{\omega}_1'). \tag{12}$$

Поэтому вместо (11) можно записать:

$$d\sigma_s = 4\left(\frac{M}{1+M}\right)^2\frac{z^2Z^2e_0^4}{m^2}\frac{d\omega_1'}{|\vec{v}_1' - \vec{v}_1|^4}, \tag{13}$$

откуда, опуская индексы 1 у разности скоростей:

$$s_1(\vec{v}, \vec{V}; \vec{v}') = 4\left(\frac{M}{1+M}\right)^2\frac{z^2Z^2e_0^4}{m^2|\vec{v}' - \vec{v}|^4}. \tag{14}$$

Формулы (10) и (14) дают явные выражения для (8) в двух наиболее важных случаях кинетики примесей в плазме.

5. Объединяя оба равенства (8) в едином выражении для эффективного сечения $d\sum_s$, относящегося к скоростному элементу $d\vec{v}_1'$, имеем:

$$d\sum_s = s_1(\vec{v}; \vec{V}; \vec{v}')\frac{\delta(v_1' - v_1)}{v_1^2}d\vec{v}_1', \tag{15}$$

где $\delta(x)$ есть δ-функция Дирака, определяемая условием:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-a)\,dx = f(a);\ \delta(x)=0,\quad x\neq 0, \tag{16}$$

с произвольной непрерывной функцией $f(x)$. Выражение (15) составлено так, чтобы соблюдалось $d\sigma_s = \int_{v_1'=0}^{\infty} d\sum_s$.

Поскольку разность $\vec{v}' - \vec{v}_1'$ совпадает со скоростью центра инерции сталкивающихся частиц и не зависит от их скоростей после рассеяния, то $d\vec{v}_1' = d\vec{v}'$ и, согласно (15), (5):

$$\mathfrak{S}(\vec{v},\ \vec{V};\ \vec{v}') = \hat{s}_1(\vec{v},\ \vec{V};\ \vec{v}')\frac{\delta(v_1'-v_1)}{v_1^2}. \tag{17}$$

Чтобы воспользоваться формулой (6) для нахождения $\Gamma(t,\ \vec{r},\ \vec{v};\ \vec{v}')$, необходимо преобразовать все аргументы (17) к лабораторной системе отсчета. Используя свойство δ-функции:

$$\delta\{f(x)\} = \sum_{(i)} \frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|},\ f(x_i)=0, \tag{18}$$

где $|f'(x)|$ — абсолютные значения производной $\frac{df(x)}{dx}$ в точках x_i, являющихся корнями уравнения $f(x)=0$, имеем:

$$\delta(v_1'^2 - v_1^2) = \frac{1}{2v_1}\{\delta(v_1'-v_1)+\delta(v_1'+v_1)\} = \frac{1}{2v_1}\delta(v_1'-v_1), \tag{19}$$

где учтено $v_1'+v_1>0$. Вводя обозначение

$$\vec{g} \equiv \vec{v}' - \vec{v} = \vec{v}' - \vec{v}_1 \tag{20}$$

и учитывая (7), находим:

$$v_1'^2 - v_1^2 = (\vec{v}_1' - \vec{v}_1)(\vec{v}_1' + \vec{v}_1) = \vec{g}(\vec{g}+2\vec{v}_1) = \frac{2M}{1+M}\left[\frac{1+M}{2M}g^2 + \vec{g}(\vec{v}-\vec{V})\right]. \tag{21}$$

Равенства (19), (21), (7) и $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$, $a=\text{const}$, (18), дают:

$$\frac{\delta(v_1'-v_1)}{v_1^2} = \frac{2}{v_1}\delta(v_1'^2 - v_1^2) = \left(\frac{1+M}{M}\right)^2 \frac{1}{|\vec{v}-\vec{V}|}\delta\left\{\vec{g}\vec{V} - \left[\vec{g}\vec{v} + \frac{1+M}{2M}g^2\right]\right\} \tag{22}$$

и поэтому, согласно (17):

$$\mathfrak{S}(\vec{v},\ \vec{V};\ \vec{v}') = \left(\frac{1+M}{M}\right)^2 \frac{\hat{s}_1(\vec{v},\ \vec{V};\ \vec{v}')}{|\vec{v}-\vec{V}|}\delta\left\{\vec{g}\vec{V} - \left[\vec{g}\vec{v} + \frac{1+M}{2M}g^2\right]\right\}. \tag{23}$$

6. Формулы (6), (23) выражают функцию $\Gamma(t,\ \vec{r},\ \vec{v},\ \vec{v}')$ для произвольного скоростного распределения частиц среды $F(t,\ \vec{r},\ \vec{V})$ в наиболее общем случае упругого рассеяния, задаваемого эффективным сечением (8). В дальнейшем мы ограничимся предположением, что функция $\hat{s}_1(\vec{v},\ \vec{V};\ \vec{v}')$, (8), фактически от вектора $\vec{V}$ не зависит:

$$\hat{s}_1(\vec{v},\ \vec{V};\ \vec{v}') \equiv \hat{s}_1(\vec{v},\ \vec{v}'). \tag{24}$$

В случае кулоновского взаимодействия (14) условие (24) обеспечено. В случае рассеяния нейтронов на ядрах (10) условие (24) требует, чтобы интегральное эффективное сечение $\sigma_s(|\vec{v}-\vec{V}|)$ было задано константой, не зависящей от скорости сближения сталкивающихся частиц. Из (6), (23), (24):

$$\Gamma(t, \vec{r}, \vec{v}; \vec{v}') = \left(\frac{1+M}{M}\right)^2 N(t, \vec{r})\, \hat{s}_1(\vec{v}, \vec{v}') \int F(t, \vec{r}, \vec{V})\, \delta\left\{\vec{g}\vec{V} - \left[\vec{g}\vec{v} + \frac{1+M}{2M} g^2\right]\right\} d\vec{V}. \quad (25)$$

Пусть μ, φ,— соответственно, косинус полярного угла и азимутальный угол вектора $\vec{V}$ в сферической системе скоростных координат с вектором $\vec{g}$ (см. (20)), в качестве полярной оси; $\vec{g}\vec{V} = gV\mu$, $d\vec{V} = V^2\, dV\, d\mu\, d\varphi$.

Записывая $F(t, \vec{r}, \vec{V}) \equiv F(t, \vec{r}; V, \mu, \varphi)$ и используя свойства δ-функции, получаем:

$$\Gamma(t, \vec{r}, \vec{v}; \vec{v}') = \left(\frac{1+M}{M}\right)^2 N(t, \vec{r}) \frac{\hat{s}_1(\vec{v}, \vec{v}')}{g} \times$$

$$\times \int_0^\infty V dV \int_{-1}^{1} \delta\left\{\mu - \frac{1}{gV}\left[\vec{g}\vec{v} + \frac{1+M}{2M} g^2\right]\right\} d\mu \int_0^{2\pi} F(t, \vec{r}; V, \mu, \varphi)\, d\varphi =$$

$$= \left(\frac{1+M}{M}\right)^2 N(t, \vec{r}) \frac{\hat{s}_1(\vec{v}, \vec{v}')}{g} \int_{V_0}^\infty V dV \int_0^{2\pi} F\left(t, \vec{r}; V, \frac{1}{gV}\left[\vec{g}\vec{v} + \frac{1+M}{2M} g^2\right], \varphi\right) d\varphi, \quad (26)$$

где $V_0 = \frac{1}{g}\left|\vec{g}\vec{v} + \frac{1+M}{2M} g^2\right|$. Нижний предел интегрирования $V = 0$ поднят до $V = V_0$, поскольку

$$\delta\left\{\mu \pm \frac{V_0}{V}\right\} \equiv 0, \quad -1 \leqslant \mu \leqslant 1, \quad V < V_0. \quad (27)$$

Итак, установлено правило (26): чтобы определить функцию $\Gamma(t, \vec{r}, \vec{v}; \vec{v}')$ в случае упругого рассеяния по закону (8), удовлетворяющему условию (24), нужно записать скоростное распределение частиц среды в сферической системе координат с вектором $\vec{g} = \vec{v}' - \vec{v}$ в качестве полярной оси, проинтегрировать его по азимутальному углу, вместо косинуса полярного угла подставить величину $\frac{1}{gV}\left[\vec{g}\vec{v} + \frac{1+M}{2M} g^2\right]$, результат проинтегрировать по VdV от $V = \frac{1}{g}\left|\vec{g}\vec{v} + \frac{1+M}{2M} g^2\right|$ до $V = \infty$ и домножить на коэффициент $\left(\frac{1+M}{M}\right)^2 \frac{N\hat{s}_1}{g}$.

7. Если состояние среды задается плотностью числа частиц $N(t, \vec{r})$, их температурой $T(t, \vec{r})$ и скоростью гидродинамического смещения $\vec{C}(t, \vec{r})$, то в качестве скоростного распределения частиц среды $F(t, \vec{r}, \vec{V})$ можно принять:

$$F^{(\vec{C})}(t, \vec{r}, \vec{V}) = F^{(T)}(t, \vec{r}, \vec{V})\{1 + 2B^2\vec{V}\cdot\vec{C}(t, \vec{r})\}; \quad F^{(T)}(t, \vec{r}, \vec{V}) = \pi^{-\frac{3}{2}} B^3 e^{-B^2V^2}, \quad (28)$$

где $B^2 = \dfrac{Mm}{2T(t, \vec{r})}$ при задании температуры T в энергетических единицах; $F^{(T)}(t, \vec{r}, \vec{V})$ — максвелловское распределение скоростей для частиц с массой Mm при температуре T, фигурирующее в полном распределении $F^{(\vec{C})}(t, \vec{r}, \vec{V})$, как его изотропная часть. Выражение для $F^{(\vec{C})}$ содержит, кроме того, направленную поправку, обеспечивающую выполнение второго из условий:

$$\int F^{(\vec{C})}(t, \vec{r}, \vec{V})\, d\vec{V} = 1; \quad \int \vec{V} F^{(\vec{C})}(t, \vec{r}, \vec{V})\, d\vec{V} = \vec{C}(t, \vec{r}). \quad (29)$$

Распределением $F^{(\vec{C})}$ (28) можно пользоваться, если, как это обычно бывает, средняя скорость хаотического движения частиц $\int \vec{V} F(t, \vec{r}, \vec{V}) d\vec{V}$ значительно превосходит скорость их направленного смещения $\left| \int \vec{V} F(t, \vec{r}, \vec{V})\, d\vec{V} \right|$.

8. Применим правило (26) к скоростному распределению (28) частиц среды $\vec{F}^{(C)}$. Пользуясь формулой косинусов сферической тригонометрии и опуская члены, исчезающие при интегрировании по $d\varphi$, имеем:

$$\frac{\vec{C}\vec{V}}{CV} = \frac{\vec{C}\vec{g}}{Cg}\frac{\vec{g}\vec{V}}{gV} + \ldots . \tag{30}$$

Последующая замена $\frac{\vec{g}\vec{V}}{gV} = \mu$, выполненная согласно (26), превращает множитель $1 + 2B^2\vec{C}\vec{V}$, содержащий угловые переменные, в величину:

$$1 + 2B^2 CV \frac{\vec{C}\vec{g}}{Cg}\frac{1}{gV}\left[\vec{g}\vec{v} + \frac{1+M}{2M} g^2\right] = 1 + 2B^2 \frac{\vec{C}\vec{g}}{g^2}\left[\vec{g}\vec{v} + \frac{1+M}{2M} g^2\right], \tag{31}$$

не зависящую от V, что позволяет вынести множитель (31) за знак интегрирования по dV. В результате, обозначая через $\Gamma^{(\vec{C})}$ и $\Gamma^{(T)}$ функцию (25), соответствующую распределениям $F^{(\vec{C})}$ и $F^{(T)}$, получаем:

$$\Gamma^{(\vec{C})}(t, \vec{r}, \vec{v}; \vec{v}') = \Gamma^{(T)}(t, \vec{r}, \vec{v}; \vec{v}')\left\{1 + 2B^2 \frac{\vec{C}\vec{g}}{g^2}\left[\vec{g}\vec{v} + \frac{1+M}{2M} g^2\right]\right\}. \tag{32}$$

Ввиду изотропии $F^{(T)}$, применение правила (26) к случаю $F = F^{(T)}$ элементарно.

$$\Gamma^{(T)}(t, \vec{r}, \vec{v}; \vec{v}') = \left(\frac{1+M}{M}\right)^2 \frac{N\tilde{s}_1(\vec{v}, \vec{v}')}{g}\int_{V_0}^{\infty} V dV \cdot \pi^{-\frac{3}{2}} B^3 e^{-B^2V^2} \cdot 2\pi =$$

$$= \left(\frac{1+M}{M}\right)^2 \frac{NB\tilde{s}_1(\vec{v}, \vec{v}')}{\sqrt{\pi}\, g}\, e^{-B^2V_0^2}, \tag{33}$$

откуда подстановкой выражения V_0:

$$\Gamma^{(T)}(t, \vec{r}, \vec{v}; \vec{v}') = \left(\frac{1+M}{M}\right)^2 \frac{NB\tilde{s}_1(\vec{v}, \vec{v}')}{\sqrt{\pi}\, g}\, e^{-\frac{B^2}{g^2}\left\{\vec{g}\vec{v} + \frac{1+M}{2M} g^2\right\}^2}, \tag{34}$$

или с учетом (20):

$$\Gamma^{(T)}(t, \vec{r}, \vec{v}; \vec{v}') = \left(\frac{1+M}{M}\right)^2 \frac{NB}{\sqrt{\pi}} \frac{\tilde{s}_1(\vec{v}, \vec{v}')}{|\vec{v}' - \vec{v}|}\, e^{-\frac{B^2}{M^2|\vec{v}' - \vec{v}|^2}\left\{\vec{v}\vec{v}' - \left[\frac{1+M}{2} v^2 + \frac{1-M}{2} v'^2\right]\right\}^2}. \tag{35}$$

Как видно из (35), интегральное ядро $\Gamma(t, \vec{r}, \vec{v}; \vec{v}')$ уравнения (4) несимметрично в скоростных переменных $\vec{v}$ и $\vec{v}'$ даже в случае симметрии коэффициента рассеяния $\tilde{s}_1(\vec{v}, \vec{v}')$ и изотропии распределения скоростей $F = F^{(T)}$ для частиц среды. Используя $2g\vec{v} = v'^2 - v^2 - g^2$ в показателе экспоненты (34), легко убедиться, что при $\tilde{s}_1(\vec{v}', \vec{v}) = \tilde{s}_1(\vec{v}, \vec{v}')$:

$$\Gamma^{(T)}(t, \vec{r}, \vec{v}'; \vec{v}) = e^{B^2\frac{v'^2 - v^2}{M}}\Gamma^{(T)}(t, \vec{r}, \vec{v}; \vec{v}'). \tag{36}$$

9. В случае распространения нейтронов в плазме при их рассеянии на ядрах с

постоянным эффективным сечением σ_s из (34) и (10) имеем:

$$\Gamma^{(T)}(t, \vec{r}, \vec{v}; \vec{v}') = \left(1+\frac{1}{M}\right)^2 \frac{NB\sigma_s}{4\pi^{\frac{3}{2}} g} e^{-\frac{B^2}{g^2}\left\{\vec{g}\vec{v}+\frac{1+M}{2M}g^2\right\}^2}. \tag{37}$$

Поскольку масса нейтрона не превосходит массы любого ядра, то здесь $M \geqslant 1$. В кинетическом уравнении (4) для нейтронов член $\operatorname{div}_{\vec{v}}(\vec{a}n)$ можно опустить, $\vec{a}(t, \vec{r}, \vec{v}) \equiv 0$.

В качестве интегрального ядра $\Gamma(t, \vec{r}, \vec{v}; \vec{v}')$ подставляется выражение (32), (37), в котором N, T, $\vec{C}$,— соответственно, плотности числа частиц, температура и скорость смещения для ядерной компоненты плазмы. При наличии ядер нескольких сортов величина (32) суммируется по всем ядерным компонентам.

В случае распространения заряженных частиц в плазме, согласно (34), (14):

$$\Gamma^{(T)}(t, \vec{r}, \vec{v}; \vec{v}') = \frac{4z^2Z^2 e_0^4 NB}{\sqrt{\pi}\, m^2 g^5} e^{-\frac{B^2}{g^2}\left\{\vec{g}\vec{v}+\frac{1+M}{2M}g^2\right\}^2}. \tag{38}$$

В присутствии внешних полей, электрического $\vec{\mathcal{E}}(t, \vec{r})$ и магнитного $\vec{\mathcal{H}}(t, \vec{r})$ частица с зарядом ze_0 и массой m испытывает ускорение:

$$\vec{a}(t, \vec{r}, \vec{v}) = \frac{ze_0}{m}\left\{\vec{\mathcal{E}}(t, \vec{r}) + \frac{1}{c}[\vec{v}\times\vec{\mathcal{H}}(t, \vec{r})]\right\}; \quad \operatorname{div}_{\vec{v}} \vec{a} = 0, \tag{39}$$

где c — скорость света. Второе из равенств (39) имеет место, поскольку $[\vec{v}\times\vec{\mathcal{H}}]_x = v_y\mathcal{H}_z - v_z\mathcal{H}_y$ не зависит от v_x и т. д. для составляющих по осям y, z; отсюда $\operatorname{div}_{\vec{v}}(\vec{a}n) = \vec{a}\operatorname{grad}_{\vec{v}} n$. Ввиду расходимости интегрального эффективного сечения $\sigma_s = \int d\sigma_s$, (11), величина $\lambda_s(t, \vec{r}, \vec{v})$ при кулоновском взаимодействии частиц бесконечна. Поэтому кинетическое уравнение (4) для заряженных частиц в плазме следует писать в форме:

$$\frac{\partial n(t, \vec{r}, \vec{v})}{\partial t} + \vec{v}\operatorname{grad}_{\vec{r}} n + \frac{ze_0}{m}\left\{\vec{\mathcal{E}}(t, \vec{r}) + \frac{1}{c}[\vec{v}\times\vec{\mathcal{H}}(t, \vec{r})]\right\}\cdot\operatorname{grad}_{\vec{v}} n + \lambda_c(t, \vec{r}, \vec{v})n +$$

$$+ n(t, \vec{r}, \vec{v})\int \Gamma(t, \vec{r}, \vec{v}; \vec{v}')\, d\vec{v}' = \int n(t, \vec{r}, \vec{v}')\,\Gamma(t, \vec{r}, \vec{v}'; \vec{v})\, d\vec{v}' + q(t, \vec{r}, \vec{v}), \tag{40}$$

представляя бесконечные величины как результат интегрирования расходящихся функций. В качестве $\Gamma(t, \vec{r}, \vec{v}; \vec{v}')$ берется сумма выражений $\Gamma^{(\vec{C})}$, (32), (38), по всем компонентам плазмы, включая электронную. В конкретных приложениях уравнения (40) главная часть расходимости слева компенсируется аналогичной расходимостью в интеграле справа. Некомпенсированной остается лишь логарифмическая расходимость которая обрезается при помощи обычной процедуры. Появление расходимостей в уравнении (40) неизбежно, пока в основе функции рассеяния $\Gamma(t, \vec{r}, \vec{v}; \vec{v}')$ лежит резерфордовское сечение (11).

10. Подобно выводу (6), для вероятности поглощения или рассеяния частицы в единицу времени получаем:

$$\lambda_j(t, \vec{r}, \vec{v}) = N(t, \vec{r})\int |\vec{v}-\vec{V}|\,\sigma_j(|\vec{v}-\vec{V}|)\,F(t, \vec{r}, V)\, d\vec{V}; \quad j = c, s, \tag{41}$$

где $\sigma_s(|\vec{v}-\vec{V}|) = \int d\sigma_s$ — интегральное эффективное сечение для рассеяния, предполагаемое конечным, чтобы $\lambda_s(t, \vec{r}, \vec{v})$ имело смысл; $\sigma_c(|\vec{v}-\vec{V}|)$ — эффективное сечение для захвата, которое конечно всегда. Если $\sigma_c(|\vec{v}-\vec{V}|) = \frac{R}{|\vec{v}-\vec{V}|}$, $R = \text{const}$, то, безот-

носительно к виду скоростного распределения для частиц среды $F(t, \vec{r}, \vec{V})$, $\int F d\vec{V} = 1$, из (41) следует $\lambda_c(t, \vec{r}, \vec{v}) = RN(t, \vec{r})$. В случае произвольной зависимости $\sigma_j(|\vec{v} - \vec{V}|)$, заданной на основе эксперимента, пользуясь распределением $F^{(\vec{C})}$ (28), и выполняя в интеграле (41) замену $\vec{v} - \vec{V} = \vec{u}$, $d\vec{V} = d\vec{u}$, находим:

$$\lambda_j^{(\vec{C})}(t, \vec{r}, \vec{v}) = N \int u \sigma_j(u) \pi^{-\frac{3}{2}} B^3 e^{-B^2(\vec{v}-\vec{u})^2} \{1 + 2B^2 \vec{C}(\vec{v} - \vec{u})\} d\vec{u}, \tag{42}$$

откуда после интегрирования по угловым переменным:

$$\lambda_j^{(\vec{C})}(t, \vec{r}, \vec{v}) = \frac{2NB}{\sqrt{\pi}\, v} e^{-B^2v^2} \int_0^\infty \sigma_j(u) e^{-B^2u^2} \left\{ \operatorname{sh}(2B^2vu) + \right.$$

$$\left. + 2B^2 \vec{C}\vec{v} \left[\left(1 + \frac{1}{2B^2v^2}\right) \operatorname{sh}(2B^2vu) - \frac{u}{v} \operatorname{ch}(2B^2vu) \right] \right\} u^2 du. \tag{43}$$

В частности, для рассеяния с постоянным эффективным сечением $\vec{\sigma}_s(|\vec{v} - \vec{V}|) = \text{const}$ из (43), $j = s$:

$$\lambda_s^{(\vec{C})}(t, \vec{r}, \vec{v}) = \nu \sigma_s N \left\{ P(w) - \frac{\vec{C}\vec{v}}{v^2} Q(w) \right\}, \quad w = Bv, \tag{44}$$

где

$$P(w) = \left(1 + \frac{1}{2w^2}\right) \operatorname{erf}(w) + \frac{1}{2w} \operatorname{erf}'(w), \tag{45}$$

$$Q(w) = \left(1 - \frac{1}{2w^2}\right) \operatorname{erf}(w) + \frac{1}{2w} \operatorname{erf}'(w) \tag{46}$$

при обозначении

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi; \quad \operatorname{erf}'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}. \tag{47}$$

Выражение (44) можно также получить, интегрируя (32), (37) по $d\vec{v}' = d\vec{g}$.

Поступила в редакцию
22. 2. 57

THE KINETIC EQUATION FOR MIXTURES

V. N. KLIMOV (MOSCOW)

(Summary)

A derivation is given of the kinetic equation for particles entering a medium in small quantities when their interaction with each other may be neglected. The probabilities of transitions, being determined only by the state of the medium, are expressed by means of the density of the particles, their temperature and the rate of hydrodynamical displacement, which are given for each component of matter as an arbitrary function of time and place. The scattering is considered elastic. The kinetic equation obtained in general terms becomes concrete for cases of travelling neutrons and charged particles in plasma.

О ЛОКАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ ДЛЯ РЕШЕТЧАТЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Ю. А. РОЗАНОВ

1°. Пусть

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots \tag{1}$$

последовательность независимых случайных величин, принимающих только целые значения;

$$\mathbf{P}\{\xi_k = j\} = p_{kj}; \quad \mathbf{M}\xi_k = a_k; \quad \mathbf{D}\xi_k = b_k^2;$$

$$S_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n; \quad P_n(m) = \mathbf{P}\{S_n = m\};$$

$$A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n; \quad B_n^2 = b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2.$$

Говорят, что к последовательности (1) применима локальная предельная теорема, если при $n \to \infty$ равномерно по m $(-\infty < m < +\infty)$

$$P_n(m) = (2\pi)^{-1/2} B_n^{-1} \exp\{-(m - A_n)^2 / 2B_n^2\} + O(B_n^{-1}). \tag{2}$$

Говорят, что к последовательности (1) применима локальная теорема в усиленной форме (Л.Т.У), если локальная предельная теорема (в обычной форме) применима к любой последовательности $\xi_1', \xi_2', \ldots, \xi_k', \ldots$, отличающейся от (1) лишь конечным числом членов.

В настоящей заметке дается необходимое и достаточное условие применимости Л.Т.У.

2°. Во всем дальнейшем будем предполагать выполненным:

$$B_n \to \infty \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{A}$$

Теорема I. *Для применимости к последовательности* (1) *Л. Т. У. необходимо условие:*

$$\prod_{k=1}^{\infty} [\max_{0 \leqslant m < h} \mathbf{P}\{\xi_k \equiv m \pmod h\}] = 0 \qquad \text{при любом } h \geqslant 2. \tag{3}$$

Доказательство: Пусть Л. Т. У. применима к нашей последовательности тогда имеют место следующие утверждения:

Лемма 1. *Для любого целого положительного* h *и* $m = 0, 1, \ldots, h-1$.

$$\mathbf{P}\{S_n \equiv m \pmod h\} \to h^{-1} \qquad \text{при} \quad n \to \infty.$$

При условии (А) утверждение леммы легко получается из соотношения (2).

Лемма 2.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\xi_k \not\equiv 0 \pmod h\} = \infty \qquad \text{при} \quad h \geqslant 2.$$

Если $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\xi_k \not\equiv 0 \pmod h\} < \infty$, то с вероятностью 1 произойдет лишь конечное число событий $\{\xi_k \not\equiv 0 \pmod h\}$, т. е., начиная с $k = k_0$, будем иметь $\xi_k \equiv 0 \pmod h$, $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\{k_0 = k\} = 1$.

Поэтому найдется такое K, что $\mathbf{P}\{k_0 \leqslant K\} > 3/4$. Рассмотрим последовательность $\xi_1', \xi_2', \ldots, \xi_k', \ldots$, где $\xi_k' = 0$ при $k \leqslant K$ и $\xi_k' = \xi_k$ при $k > K$. Как легко видеть, $\mathbf{P}\{S_n' \equiv 0 \pmod h\} > \frac{3}{4}$, а в силу леммы 1 $\mathbf{P}\{S_n' \equiv 0 \pmod h\} \to h^{-1} \leqslant 1/2$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Заметим, что Л. Т. У. выполняется одновременно для $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots$ и $\xi_1 - x_1, \xi_2 - x_2, \ldots, \xi_k - x_k, \ldots$, где $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ — любые целые числа.

Поэтому, если $\max\limits_{0 \leqslant m < h} \mathbf{P}\{\xi_k \equiv m \pmod h\} = \mathbf{P}\{\xi_k \equiv m_k \pmod h\}$, то $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\xi_k \not\equiv m_k \times$ $\times \pmod h\} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\xi_k - m_k \not\equiv 0 \pmod h\} = \infty$ и $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\xi_k \equiv m_k \pmod h\} = 0$. Теорема доказана.

3°. Из результатов Б. В. Гнеденко [1] и Ю. В. Прохорова [2] следует, что условие (3) является достаточным для применимости Л.Т.У. в случае, когда ξ_k одинаково распределены или равномерно ограничены. Спрашивается, при каких более слабых ограничениях на (1) условие (3) остается достаточным для применимости Л. Т. У. Ответ на этот вопрос дает

Теорема II. *Если последовательность* (1) *удовлетворяет ограничениям* (A) *и*

$$1 / b_k^2 \sum_{|j - a_k| \leqslant N} (j - a_k)^2 p_{kj} \to 1 \quad \textit{при} \quad N \to \infty \tag{B}$$

равномерно по k, *то условие* (3) *является достаточным для применимости Л.Т.У.*

(Заметим, что (B) выполняется, например, если

$$\mathbf{D}\xi_k \geqslant m > 0, \qquad \mathbf{M}\,|\,\xi_k - a_k\,|^3 \leqslant M < \infty).$$

Доказательство. Будем через $f(t, \xi)$ обозначать характеристическую функцию случайной величины ξ, тогда $f(t, S_k) = \sum\limits_{m=-\infty}^{+\infty} e^{itm} P_n(m)$. Согласно формуле обращения

$$2\pi P_n(m) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-itm} f(t, S_k)\, dt = B_n^{-1} \int_{-\pi B_n}^{\pi B_n} e^{-itz} f(t, s_k)\, dt,$$

где

$$z = \frac{m - A_n}{B_n}, \quad s_k = \frac{S_k - A_n}{B_n}.$$

Так как $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} = \dfrac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-itz - \frac{t^2}{2}}\, dt$, то

$$R_n(m) = 2\pi \left[B_n P_n(m) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \right] = I_1 + I_2 + I_3 + I_4,$$

где

$$I_1 = \int_{-T}^{T} e^{-itz} \left[f(t, s_k) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right] dt, \qquad I_2 = \int_{T \leqslant |t| \leqslant \Delta B_n} e^{-itz} f(t, s_k)\, dt,$$

$$I_3 = \int_{\Delta B_n \leqslant |t| \leqslant \pi B_n} e^{-itz} f(t, s_k)\, dt \quad \text{и} \quad I_4 = \int_{|t| \geqslant T} e^{-itz - \frac{t^2}{2}}\, dt.$$

В силу условия (B) для любого $\varepsilon > 0$ равномерно по k $\sum\limits_{|j - a_k| > N} (j - a_k)^2 p_{kj} \leqslant \varepsilon b_k^2$ при достаточно больших N.

Отсюда следует условие Линдеберга: для любых $\tau > 0$ и $\varepsilon > 0$ найдется такое n_0,

что

$$\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{|j-a_k|>\tau B_n}(j-a_k)^2 p_{kj}\leqslant\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon b_k^2=\varepsilon \quad \text{при } n\geqslant n_0.$$

Поэтому $f(t, s_k)\to e^{-\frac{t^2}{2}}$ равномерно на любом конечном интервале, и, значит, $I_1\to 0$ при $n\to\infty$.

Далее, для некоторого N_0

$$\sum_{|j-a_k|>N_0}(j-a_k)^2 p_{kj}\leqslant\frac{b_k^2}{8},$$

и $|1-e^{itN_0}|\leqslant\frac{1}{4}$ при $|t|\leqslant\frac{1}{4N_0}=\Delta$. Так как

$$f(t, \xi_k-a_k)=1-\frac{t^2}{2}\mathbf{M}[(\xi_k-a_k)^2 e^{i\theta_k(\xi_k-a_k)}]=$$

$$=1-\frac{t^2}{2}b_k^2+\frac{t^2}{2}\mathbf{M}[(1-e^{i\theta_k(\xi_k-a_k)})(\xi_k-a_k)^2], \quad |\theta_k|\leqslant|t|,$$

то при $|t|\leqslant\Delta$

$$|f(t, \xi_k-a_k)|\leqslant 1-\frac{t^2}{2}b_k^2+\frac{t^2}{2}\sum_{|j-a_k|\leqslant N_0}|1-e^{i\theta_k(j-a_k)}|\,|j-a_k|^2+$$

$$+\frac{t^2}{2}\cdot 2\sum_{|j-a_k|>N_0}(j-a_k)^2 p_{k_j}\leqslant 1-\frac{t^2b_k^2}{4}\leqslant e^{-\frac{t^2b_k^2}{4}}.$$

Отсюда для модуля характеристической функции и величин $|I_r|$ получаем следующие оценки

$$|f(t, s_k)|=\prod_{k=1}^{n}|f(t/B_n, \xi_k-a_k)|\leqslant e^{-\frac{t^2}{4B_n^2}\sum_{k=1}^{n}b_k^2}=e^{-\frac{t^2}{4}}$$

и

$$|I_2|\leqslant\int_{T\leqslant|t|\leqslant\Delta B_n}|f(t, s_k)|\,dt\leqslant 2\int_T^\infty e^{-\frac{t^2}{4}}dt\leqslant\frac{4}{T}e^{-\frac{T^2}{4}},$$

$$|I_4|\leqslant 2\int_T^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}dt\leqslant\frac{2}{T}e^{-\frac{T^2}{2}},$$

$$|I_3|\leqslant\int_{\Delta B_n\leqslant|t|\leqslant\pi B_n}|f(t, s_k)|\,dt=B_n\int_{\Delta\leqslant|t|\leqslant\pi}\prod_{k=1}^{n}|f(t, \xi_k)|\,dt;$$

$$|f(t, \xi_k)|^2\leqslant e^{|f(t, \xi_k)|^2-1}, \quad \prod_{k=1}^{n}|f(t, \xi_k)|\leqslant\exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(|f(t, \xi_k)|^2-1)\right\},$$

$$|I_3|\leqslant 2B_n\int_\Delta^\pi\varphi_n(t)\,dt, \quad \text{где} \quad \varphi_n(t)=\exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(|f(t, \xi_k)|^2-1)\right\}.$$

Пусть $p_{kj_k}=\max\limits_j p_{kj}$. Не ограничивая общности, можно считать $j_k=0$, так как

и условия (A), (B) и Л.Т.У. выполняются одновременно для $\xi_1, \xi_2, \ldots$ и $\xi_1 - j_1, \xi_2 - j_2, \ldots$

Лемма 3. *Если выполнено* (B) *и* $p_{k0} \geqslant p_{kj}$, *то* $p_{k0} \geqslant p > 0$, $|a_k| \leqslant a < \infty$.

Действительно, в случае $b_k^2 \geqslant \frac{1}{2}$ для некоторого N_1

$$N^2 \mathbf{P}\{|\xi_k - a_k| \leqslant N_1\} \geqslant \sum_{|j-a_k| \leqslant N} (j-a_k)^2 p_{kj} \geqslant \frac{b_k^2}{2} \geqslant \frac{1}{4}$$

и

$$p_{k0} \geqslant \max_{|j-a_k| \leqslant N_1} p_{kj} \geqslant \frac{1}{4N_1^2(2N_1+1)} = p.$$

В случае $b_k^2 \leqslant \frac{1}{2}$

$$\mathbf{P}\{|\xi_k - a_k| \leqslant 1\} \geqslant 1 - b_k^2 \geqslant \frac{1}{2}, \quad p_{k0} \geqslant \frac{1}{6} \geqslant p.$$

Далее $a_k^2 p \leqslant b_k^2 \leqslant 2N_1^2$
и $|a_k| \leqslant a$ для некоторого $a < \infty$.

Лемма 4. *Существует* N_2, *не зависящее от* k, *такое, что* $b_k^2 \leqslant 2N_2^2 \mathbf{P}\{0 < |\xi_k| \leqslant N_2\}$.

Действительно, при достаточно больших N

$$b_k^{-2} \sum_{|j-a_k|>N-a} (j-a_k)^2 p_{kj} \geqslant b_k^{-2} \sum_{|j|>N} (j-a_k)^2 p_{kj} \geqslant \frac{b_k^{-2}}{2} \sum_{|j|>N} j^2 p_{kj}.$$

Отсюда, при $N \to \infty$ $b_k^{-2} \sum_{|j|>N} j^2 p_{kj} \to 0$ равномерно по k, и для некоторого N_2

$$2 \sum_{|j|>N_2} j^2 p_{kj} \leqslant b_k^2 \leqslant \sum_j j^2 p_{kj}, \quad \sum_{|j|>N_2} j^2 p_{kj} \leqslant \sum_{|j| \leqslant N_2} j^2 p_{kj},$$

$$b_k^2 \leqslant 2 \sum_{|j| \leqslant N_2} j^2 p_{kj} \leqslant 2N_2^2 \mathbf{P}\{0 < |\xi_k| \leqslant N_2\}, \qquad \text{что и требовалось доказать.}$$

Имеем

$$|f(t, \xi_k)|^2 = \sum_j \tilde{p}_{kj} \cos jt, \quad \tilde{p}_{kj} = \sum_s p_{k,j+s} p_{k,s}$$

$$|f(t, \xi_k)|^2 - 1 = \sum_j \tilde{p}_{kj} (\cos jt - 1) \leqslant \sum_{|j| \leqslant N_2} \tilde{p}_{kj} (\cos jt - 1).$$

Пусть $t_1, t_2, \ldots, t_\mu$ — точки отрезка $[\Delta, \pi]$ вида $2\pi \frac{r}{l}$, взятые в порядке возрастания $1 \leqslant r \leqslant [l/2]$, $2 \leqslant l \leqslant 2N_2$, r и l взаимно просты.

Положим $\Delta_1 = [\Delta, (t_1 + t_2)/2]$, $\Delta_m = [(t_{m-1} + t_m)/2, (t_m + t_{m+1})/2]$ при $2 \leqslant m \leqslant \mu - 1$, $\Delta_\mu = [(t_{\mu-1} + \pi)/2, \pi]$, $\pi = t_\mu$.

$$\int_\Delta^\pi \varphi_n(t)\, dt = \sum_{m=1}^{\mu} \int_{\Delta_m} \varphi_n(t)\, dt.$$

Оценим теперь $B_n \int_{\Delta_m} \varphi_n(t)\, dt$. Через $\delta, \delta', \ldots$ будем обозначать некоторые положительные постоянные.

Пусть $t \in \Delta_m$, $t_m = 2\pi r_0 / j_0$. Так как $|t_{m'} - t_{m''}| \geqslant \frac{\pi}{2N_2^2}$, то для любого целого ω и

$$j \not\equiv 0 \pmod{j_0}, \quad 2 \leqslant j \leqslant 2N_2, \quad \left| t - 2\pi \frac{\omega}{j} \right| > \delta \quad \text{и}$$

$$\cos jt - 1 < -\delta', \cos t - 1 < \delta'. \text{ При } j \equiv 0 \pmod{j_0}$$

$$\left| t - 2\pi \frac{\omega}{j} \right| \geqslant |t - t_m| \text{ и } \cos jt - 1 \leqslant -2\sin^2 \frac{(t - t_m)}{2} \leqslant -\delta''(t - t_m)^2.$$

Отсюда

$$|f(t, \xi_k)|^2 - 1 \leqslant -\delta' \sum_{|j| \leqslant N_2}{}' \widetilde{p}_{kj} - \delta''(t - t_m)^2 \sum_{0 < |j| \leqslant N_2}{}'' \widetilde{p}_{kj},$$

где $\sum'$ обозначает сумму по $j \not\equiv 0 \pmod{j_0}$, а $\sum''$ — сумму по $j \equiv 0 \pmod{j_0}$.

Так как $p_{k0} \geqslant p$ (лемма 3), то $\widetilde{p}_{kj} = \sum_s p_{k, j+s} p_{ks} \geqslant p_{kj} p$ и

$$|f(t, \xi_k)|^2 - 1 \leqslant -\delta' p \sum_{|j| \leqslant N_2}{}' p_{kj} - \delta'' p (t - t_m)^2 \sum_{0 < |j| \leqslant N_2}{}'' p_{kj}.$$

Положим

$$\alpha_n = \frac{1}{2} \delta' p \sum_{k=1}^{n} \sum_{|j| \leqslant N_2}{}' p_{kj}, \quad \beta_n = \frac{1}{2} \delta'' p \sum_{k=1}^{n} \sum_{0 < |j| \leqslant N_2}{}'' p_{kj};$$

$$\varphi_n(t) \leqslant \exp\{-\alpha_n - \beta_n (t - t_m)^2\}.$$

Из леммы 4 следует, что $B_n^2 = O(\alpha_n + \beta_n)$. Если $\alpha_n \geqslant \beta_n$, то $B_n = O(\sqrt{\alpha_n})$ и

$$B_n \int_{\Delta_m} \exp\{-\alpha_n - \beta_n (t - t_m)^2\}\, dt \leqslant O(\sqrt{\alpha_n})\, e^{-\alpha_n} \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Если $\alpha_n < \beta_n$, то $B_n = O(\sqrt{\beta_n})$

$$|f(t, \xi_k)|^2 - 1 \leqslant \sum_j{}' \widetilde{p}_{kj} (\cos jt - 1) + \sum_{0 < |j| \leqslant N_2}{}'' \widetilde{p}_{kj} (\cos jt - 1)$$

и

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (|f(t, \xi_k)|^2 - 1) \leqslant \frac{1}{2} p \sum_{k=1}^{n} \sum_j{}' p_{kj} (\cos jt - 1) - \beta_n (t - t_m)^2.$$

Но $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_j{}' p_{kj} = \infty$, так как в противном случае

$$\prod_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}\{\xi_k \equiv 0 \pmod{j_0}\} > 0.$$

Пусть

$$\sum_{k=1}^{n} p_{kj} = P_j^{(n)}; \quad \sum_j{}' P_j^{(n)} \to \infty \qquad \text{при } n \to \infty.$$

Покажем, что $\sum_j{}' P_j^{(n)} \left(1 - \cos 2\pi r_0 \frac{j}{j_0}\right) \to \infty$. Действительно, $\frac{j}{j_0} = k + \frac{s}{j_0}$, $1 \leqslant s \leqslant j_0 - 1$, так как $j \not\equiv 0 \pmod{j_0}$; $\cos 2\pi r_0 \frac{j}{j_0} = \cos 2\pi r_0 \frac{s}{j_0}$; $\left| 2\pi r_0 \frac{s}{j_0} - 2\pi\omega \right| \geqslant \delta'''$ при любом це-

лом ω потому, что r_0 и j_0 взаимно просты и $\frac{sr_0}{j_0}$ не целое.

$$1-\cos 2\pi r_0\frac{j}{j_0}\geqslant 1-\cos\delta^{m},\quad \sum_j{}' P_j^{(n)}\left(1-\cos 2\pi r_0\frac{j}{j_0}\right)\to\infty \quad \text{при } n\to\infty.$$

Рассмотрим

$$\pi_n(t)=\frac{1}{2}p\sum_{k=1}^{n}\sum_j{}' p_{kj}(1-\cos jt)=\frac{1}{2}p\sum_j{}' P_j^{(n)}(1-\cos jt).$$

Нетрудно видеть, что $\pi_n(t)$ — непрерывная функция $\pi_{n+1}(t)\geqslant\pi_n(t)$ и

$$\pi_n(t_m)=\frac{1}{2}p\sum_j{}' P_j^{(n)}\left(1-\cos 2\pi r_0\frac{j}{j_0}\right)\to\infty \quad \text{при } n\to\infty.$$

Поэтому для любого M найдутся такие n_0 и δ, что $\pi_n(t)\geqslant M$ при $n\geqslant n_0$ и $t\in\delta_m=[t_m-\delta, t_m+\delta]$. ($\delta$ предполагается столь малым, что $\delta_m\subseteq\Delta_m$.)

Так как $\varphi_n(t)\leqslant\exp\{-\pi_n(t)-\beta_n(t-t_m)^2\}$, то $B_n\int\limits_{\Delta_m}\varphi_n(t)\,dt\leqslant B_n\times$

$$\times\int\limits_{\delta_m}e^{-M-\beta_n(t-t_m)^2}dt+B_n\int\limits_{\Delta_m\setminus\delta_m}e^{-\beta_n(t-t_m)^2}dt\leqslant e^{-M}B_n\int\limits_0^{\infty}e^{-\beta_n(t-t_m)^2}dt+\pi B_n e^{-\beta_n\delta^2}\leqslant$$

$$\leqslant e^{-M}O(\sqrt{\beta_n})\sqrt{\frac{\pi}{\beta_n}}+O(\sqrt{\beta_n})e^{-\beta_n\delta^2}<\varepsilon$$ для любого $\varepsilon>0$ при достаточно больших M и n. Отсюда

$$|I_3|\leqslant\sum_{m=1}^{\mu}2B_n\int\limits_{\Delta_m}\varphi_n(t)\,dt\to 0 \quad \text{при } n\to\infty.$$

Итак,

$$|R_n(m)|=2\pi|B_nP_n(m)-(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\exp\{-(-m-A_n)^2/2B_n^2\}|\leqslant$$

$$\leqslant|I_1|+|I_3|+\frac{4}{T}e^{-\frac{T^2}{4}}+\frac{2}{T}e^{-\frac{T^2}{2}}.$$

Для любого $\varepsilon>0$ равномерно по m при T и n достаточно больших $|R_n(m)|<\varepsilon$. Теорема доказана.

В заключение отметим, что если считать $p_{k0}\geqslant p_{kj}$, то теоремы I, II можно объединить довольно наглядной формулировкой.

Для применимости Л. Т. У. к последовательности (1), *удовлетворяющей ограничениям* (А) *и* (В), *необходимо и достаточно, чтобы наибольший общий делитель любой совокупности целых чисел I, для которой* $\prod\limits_{k=1}^{\infty}\mathrm{P}\{\xi_k\in I\}>0$, *был равен 1.*

Пользуюсь случаем выразить свою признательность А. Н. Колмогорову и Ю. В. Прохорову, под руководством которых настоящая заметка была написана в качестве курсовой работы.

Поступила в редакцию
20.12.56

ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. В. Гнеденко. О локальной предельной теореме теории вероятностей, УМН. III, 3 (25), (1948), 187—190.

[2] Ю. В. Прохоров. О локальной предельной теореме для решетчатых распределений, ДАН СССР, 98, № 4 (1954), 535—538.

ON A LOCAL LIMIT THEOREM FOR LATTICE DISTRIBUTIONS

Yu. A. ROZANOV (MOSCOW)

(*Summary*)

Let sequence (1) of independent random variables assuming only integral values satisfy conditions (A) and (B). The following proposition is proved:

In order for correlation (2) to hold true for a sequence differing from (1) only by a finite number of terms, it is necessary and sufficient for (3) to be satisfied.

МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ БРОУНОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ЛЕВИ И ОБОБЩЕННЫЙ БЕЛЫЙ ШУМ

Н. Н. ЧЕНЦОВ

В настоящей заметке дается наглядное геометрическое истолкование многопараметрического броуновского движения Lévy [1]. Для большей элементарности изложения мы будем проводить рассуждения, не опираясь на общие теоремы работы Itô [2].

Пусть задано однородное пространство с инвариантной σ-конечной мерой μ. Следуя Бохнеру [3], будем называть белым шумом $\xi(V)$ случайную функцию, заданную на множествах конечной меры из некоторой σ-алгебры и обладающую следующими свойствами:

а) $\xi(V)$ распределено нормально со средним 0 и дисперсией $\mu(V)$;

б) если множества V и W не пересекаются, то $\xi(V)$ и $\xi(W)$ независимы, и $\xi(V \cup W) = \xi(V) * \xi(W)$. Можно сказать, что белый шум — это случайная мера, принимающая значения разных знаков и имеющая, вообще говоря, неограниченную вариацию *.

Будем рассматривать евклидову плоскость как совокупность прямых. Как известно, в этом пространстве существует мера, инвариантная относительно группы движений. (Если условиться задавать прямую в виде $x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0$, где $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$; $p \geqslant 0$, то эта мера множества V прямых задается интегралом $\mu(V) = \int\limits_V d\varphi dp$, см., напр., [6].) Вычислим меру некоторых множеств, не используя ее аналитического задания. Очевидно, в силу σ-конечности и инвариантности, мера одной прямой равна нулю; точно по тем же соображениям равна нулю мера пучка прямых, проходящих через фиксированную точку, или мера пучка параллельных прямых. Так как меры множеств прямых, пересекающих равные отрезки, должны быть одинаковы, то мера количества прямых, пересекающих данный отрезок, пропорциональна его длине. Нам удобно выбрать коэффициент пропорциональности равным единице.

Обозначим $\widehat{A}$, $\widehat{AB}$ соответственно множества прямых, проходящих через точку A и пересекающих отрезок AB. Из геометрических аксиом имеем

$$(\widehat{AB} \cap \widehat{BC}) \cup (\widehat{AB} \cap \widehat{CA}) = \widehat{AB},$$

$$(\widehat{AB} \cap \widehat{BC}) \cap (\widehat{AB} \cap \widehat{CA}) \subset \widehat{A} \cup \widehat{B} \cup \widehat{C}.$$

Поэтому

$$\mu(\widehat{AB} \cap \widehat{BC}) + \mu(\widehat{AB} \cap \widehat{CA}) = \mu(\widehat{AB}).$$

Рассмотрим белый шум в пространстве прямых евклидовой плоскости. Выберем какую-нибудь точку O за начальную и положим для каждой точки A, что $\eta(A) = \xi(\widehat{OA})$.

Lévy определял броуновское движение от m параметров, как случайное поле $X(A)$, обладающее следующими свойствами:

---

* Определение белого шума было дано Гельфандом [4] и Itô [5] в несколько более общей форме.

а) величины $X(A_j) = X(A_i) - X(0)$ при любом выборе точек $A_1, \ldots, A_n$; $n = 1, 2, \ldots$ имеют совместное несмещенное нормальное распределение;

б) $\mathrm{M} \mid X(A) - X(B) \mid^2 = \mid AB \mid$.

Эти условия определяют случайное поле однозначно, с точностью до выбора точки O. Очевидно, что наше случайное поле $\eta(A)$ обладает свойством а), так как мы можем разбить множества $\widehat{OA}_i$, $i = 1, \ldots, n$, на 2^n не пересекающихся между собой множеств и, соответственно этому, представить $\eta(A_i) = \xi(\widehat{OA}_i)$, $i = 1, \ldots, n$ как сумму независимых нормальных случайных величин, с математическим ожиданием, равным нулю. Подобным же приемом можно вычислить дисперсию

$$\eta(A) - \eta(B) = \xi(\widehat{OA}) - \xi(\widehat{OB}) =$$

$$= \xi(\widehat{OA} \cap \widehat{AB}) + \xi(\widehat{OA} \cap \widehat{OB}) - \xi(\widehat{OB} \cap \widehat{AB}) - \xi(\widehat{OB} \cap \widehat{OA}) =$$

$$= \xi(\widehat{OA} \cap \widehat{AB}) - \xi(\widehat{OB} \cap \widehat{AB}).$$

Так как $\mu(\widehat{OA} \cap \widehat{AB} \cap \widehat{OB}) = 0$, то $\xi(OA \cap AB)$ и $\xi(\widehat{OB} \cap \widehat{AB})$ независимы и дисперсия их разности равна сумме дисперсий, т. е.

$$\mathrm{D}[\eta(A) - \eta(B)] = \mu(\widehat{OA} \cap \widehat{AB}) + \mu(\widehat{OB} \cap \widehat{AB}) = \mid AB \mid.$$

Таким образом, построенное наше случайное поле $\eta(A)$ является броуновским движением Леви от двух параметров. Все рассуждения и выкладки дословно переносятся и на случай большего числа измерений, только в m-мерном пространстве надо рассматривать инвариантную меру множества $(m-1)$-мерных гиперплоскостей, пересекающих данный отрезок.

Поступила в редакцию
25. 3. 57

ЛИТЕРАТУРА

[1] P. Lévy, Processus stochastiques et mouvement brownien, Paris, Gauthier-Villars, 1948.
[2] K. Itô, Isotropic random current, Proc. 3-rd Berkeley Symp. on Math. Statistics and Probability, University of California Press.
[3] S. Bochner, Harmonic analisis and the theory of probability, 1955.
[4] М. М. Гельфанд, ДАН СССР, **100** (1955), 853—856.
[5] K. Itô, Complex multiple Wiener integral, Jap. J. Math., **22** (1952), 63—86.
[6] L. A. Santalo, Introduction to integral geometry, Paris, Hermann & Cie, 1953. [Л. А. Сантало, Введение в интегральную геометрию, Москва, Изд. ин. лит., 1956.]

LE MOUVEMENT BROWNIEN À PLUSIEURS PARAMÈTRÉS DE M. LÉVY ET LE BRUIT BLANC GÉNÉRALISÉ

N. N. ČENTSOV (*MOSCOU*)

(*Sommaire*)

Cette note contient une nouvelle interprétation géométrique du mouvement brownien à plusieurs paramètres introduit par M. Lévy, voir [1].

ON RELATIONS BETWEEN STRICT SENSE AND WIDE SENSE CONDITIONAL EXPECTATIONS

ZBYNĚK ŠIDÁK

1. Introduction and notations

Let (X, F, μ) be a probability measure space; that means X is a basic space with elements x, F is a σ-algebra of subsets of X, and μ is a probability measure on F. Random variable $f(x)$ is an F-measurable real function defined on space X. If two random variables differ only on a set of measure zero, we regard them as identical. We shall use the notation 1 for a random variable that is identically equal to 1. If $A \subset X$, we denote by χ_A the characteristic function of the set A, that is, the function which equals 1 on A and 0 on $X - A$.

Let us denote by L_2 the space of all random variables $f(x)$ with $\int f^2 \, d\mu < \infty$, and by L_1 the space of all random variables $f(x)$ with $\int |f| \, d\mu < \infty$. L_2 is then the well-known Hilbert space (which need not be separable in this case, of course).

We shall use the following three kinds of convergences: convergence in L_2, i. e. in the mean of degree 2, denoted by $\xrightarrow{2.}$; convergence in L_1, i. e. in the mean of degree 1, denoted by $\xrightarrow{1.}$; and convergence almost surely, i. e. with probability 1, denoted by $\xrightarrow{a.s.}$.

Let $G \subset F$ be any σ-algebra. Throughout the paper we shall suppose that all such σ-algebras G contain all sets of measure zero; all assertions concerning uniqueness etc. are to be understood in this sense. Now, let us denote by $L_2(G)$ the space of all G-measurable random variables $f(x)$ with $\int f^2 d\mu < \infty$; then in particular $L_2(F) = L_2$. The spaces $L_2(G)$ considered as subspaces of L_2 are called measurable subspaces, according to Bahadur [1].

If $f \in L_1$, let $E\{f \mid G\}$ be the conditional expectation (in the strict sense) of random variable f relative to the σ-algebra G as defined by Doob [3]. Further on, we shall only speak of «conditional expectations» omitting the words «in the strict sense».

If $\mathfrak{M}$ is any closed linear manifold in L_2 and $f \in L_2$, then Doob defines the conditional expectation in a wide sense $\hat{E}\{f \mid \mathfrak{M}\}$ as well. We shall also use this notation; however, to simplify our terminology we shall call this transformation the «projection on $\mathfrak{M}$». (In fact, $\hat{E}\{f \mid \mathfrak{M}\}$ is the projection of Hilbert space L_2 on the closed linear manifold $\mathfrak{M}$ in the usual meaning.)

The purpose of this paper is to discuss the relations between conditional expectations $E\{- \mid G\}$ and projections $\hat{E}\{- \mid \mathfrak{M}\}$. As a further result, a new system of conditions will be given characterizing conditional expectations as transformations of Hilbert space L_2 into itself.

In these problems of characterizing conditional expectations, the operation of multiplying two functions was usually used (Shu-Teh Chen Moy [5], Bahadur [1]). However, this conception leads to some difficulties, for $f \in L_2$, $g \in L_2$ does not imply $f \cdot g \in L_2$. This difficulty is eliminated in the quoted papers in such a way that only products of bounded functions are considered. This paper is an attempt to do away with the above-mentioned difficulty in quite a different way; namely, the operation of forming a maximum of two functions $\max(f, g)$ is used instead of the operation of multiplication. In this way some simplifications are obtained because of the following:

Lemma 1. *If* $f \in L_2$, $g \in L_2$, *then* $\max(f, g) \in L_2$.

The proof of this lemma is obvious.

2. Correspondence between σ-algebras and measurable subspaces

If $G \subset F$ is any σ-algebra, let $L_2(G)$ be the corresponding measurable subspace. Below we shall study this correspondence.

Theorem 1. *The correspondence between σ-algebras G and measurable subspaces $L_2(G)$ is a one-to-one correspondence.*

Proof. If $G_1 \neq G_2$ are two different σ-algebras, then there exists $A \in G_1$, $A \overline{\in} G_2$, and clearly $\chi_A \in L_2(G_1)$, $\chi_A \overline{\in} L_2(G_2)$.

Theorem 2. *Let G_i, $i \in I$, be σ-algebras contained in F.*

(1) *If $G_1 \subset G_2$, then $L_2(G_1) \subset L_2(G_2)$.*

(2) *For every $\bigcap_{i\in I} G_i$ there corresponds a $\bigcap_{i\in I} L_2(G_i)$.*

(3) *For every $\sigma(\bigcup_{i\in I} G_i)$ there corresponds a $\sigma(\bigcup_{i\in I} L_2(G_i))$, where the symbol σ on the left denotes the least σ-algebra containing $\bigcup_{i\in I} G_i$; σ on the right denotes the least measurable subspace containing $\bigcup_{i\in I} L_2(G_i)$.*

Proof. (1) This condition is evident according to definition.

(2) For every intersection $\bigcap_{i\in I} G_i = G$ there corresponds a $L_2(G)$. For each $i \in I$ clearly $L_2(G) \subset L_2(G_i)$, and therefore $L_2(G) \subset \bigcap_{i\in I} L_2(G_i)$. Conversely $\bigcap_{i\in I} L_2(G_i) \subset$ $\subset L_2(G)$, also.

(3) Let $\mathfrak{M}$ be the measurable subspace corresponding to $\sigma(\bigcup_{i\in I} G_i)$. Then, $L_2(G_i) \subset \mathfrak{M}$ holds for each $i \in I$; hence, $\sigma(\bigcup_{i\in I} L_2(G_i)) \subset \mathfrak{M}$. Now, for every measurable subspace $\sigma(\bigcup_{i\in I} L_2(G_i))$ there inversely corresponds some σ-algebra G. We can easily see that $G_i \subset G$ for each $i \in I$; hence, $\sigma(\bigcup_{i\in I} G_i) \subset G$, and according to (1), $\mathfrak{M} \subset \sigma(\bigcup_{i\in I} L_2(G_i))$.

Now we shall prove the principal theorem characterizing measurable subspaces as subsets of L_2.

Theorem 3. *A system $\mathfrak{M} \subset L_2$ is a measurable subspace if, and only if, it satisfies the following conditions:*

(0) *$\mathfrak{M}$ is a closed linear manifold,*

(1) $1 \in \mathfrak{M}$,

(2) *If $f \in \mathfrak{M}$, $g \in \mathfrak{M}$, then* $\max(f, g) \in \mathfrak{M}$.

Proof. I. Let $\mathfrak{M}$ be a measurable subspace $L_2(G)$. Considering the definition of $L_2(G)$, well-known theorems of measurable functions, the properties of the space L_2 and lemma 1, it is easily seen that $\mathfrak{M}$ really satisfies conditions (0), (1), (2).

II. Let $\mathfrak{M}$ satisfy the above conditions (0), (1), (2). We denote by G the system of all sets $A \subset X$ such that $\chi_A \in \mathfrak{M}$. From the above conditions for $\mathfrak{M}$ it is immediately clear that G is an algebra. If $A_n \in G$ for $n = 1, 2, 3 \ldots$, then $\bigcup_1^k A_i \in G$, $\chi_{\bigcup_1^k A_i} \in \mathfrak{M}$.

Since $\chi_{\bigcup_1^k A_i} \xrightarrow{a.s.} \chi_{\bigcup_1^\infty A_i}$ and all these random variables are majorized by a constant 1, it follows that $\chi_{\bigcup_1^k A_i} \xrightarrow{2.} \chi_{\bigcup_1^\infty A_i} \in \mathfrak{M}$, $\bigcup_1^\infty A_i \in G$. Hence G is a σ-algebra. Theorem 3 will be proved if we show that $\mathfrak{M} = L_2(G)$.

First of all, we see that for each $f \in L_2(G)$ which takes on only the values 0 and 1, $f \in \mathfrak{M}$ holds true. We shall further proceed with a method often used in integral theory; since $\mathfrak{M}$ is a closed linear manifold we can prove step by step that simple functions, non-negative functions and finally G-measurable functions are elements of $\mathfrak{M}$, that means $L_2(G) \subset \mathfrak{M}$.

Let us consider an arbitrary $f \in \mathfrak{M}$ and denote by A the set $A = \{x \in X;\ f(x) > 0\}$. The function $g(x) = \max(f(x), 0)$, which equals $f(x)$ on the set A and equals 0 on the set $X - A$, is also an element of $\mathfrak{M}$. Furthermore for each $n = 1, 2, 3 \ldots$ we define the functions $g_n(x) = n \cdot \min\left(g(x), \frac{1}{n}\right)$. From the assumed conditions it follows

that $\mathfrak{M}$ contains two functions and also their minimums; therefore, $g_n \in \mathfrak{M}$. We denote $A_n = \left\{x \in X;\ g(x) > \frac{1}{n}\right\}$; evidently $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$, $\bigcup_1^\infty A_n = A$. Obviously, $g_n(x) = 1$ on the set A_n, $g_n(x) = n \cdot g(x)$ on the set $X - A_n$ and $0 \leqslant g_n(x) \leqslant 1$ for each $x \in X$. We can easily see that $g_n \xrightarrow[a.s.]{} \chi_A$, and since the constant 1 majorizes all g_n, it follows that $g_n \xrightarrow[2.]{} \chi_A$, $\chi_A \in \mathfrak{M}$, $A \in G$.

Now, if c is an arbitrary real number, we denote $f_c(x) = f(x) - c$. Clearly, $f_c \in \mathfrak{M}$, $B = \{x \in X;\ f(x) > c\} = \{x \in X;\ f_c(x) > 0\}$ and from the previous part of this proof, it is true that $B \in G$. Summing up, we have proved that any function $f \in \mathfrak{M}$ is G-measurable, that means $\mathfrak{M} \subset L_2(G)$. Theorem 3 is proved.

As stated in part 1 of this paper, all existing papers known to the author have used a condition concerning the operation of multiplying two functions instead of condition (2) in theorem 3; then, bounded functions in measurable subspaces can be regarded as linear algebras, as done by Bahadur [1]. Our condition, on the other hand, leads naturally to the concept of a lattice. If forming the maximum and the minimum are considered as lattice operations, and if we use the terminology of Birkhoff [2] then theorem 3 evidently can be modified as follows.

Theorem 3′. *A system $\mathfrak{M} \subset L_2$ is a measurable subspace if, and only if, it is a Banach lattice, and if it contains the function* 1.

3. Relations between conditional expectations and measurable projections

Definition. *The projections of Hilbert space L_2 on some measurable subspace $L_2(G)$ will be called a measurable projection.*

It is evident that the correspondence between σ-algebras G and conditional expectations $E\{- \mid G\}$, and the correspondence between closed linear manifolds $\mathfrak{M}$ and projections $\hat{E}\{- \mid \mathfrak{M}\}$ are one-to-one correspondences. Therefore, the correspondence mentioned in part 2 induces a one-to-one correspondence between conditional expectations $E\{- \mid G\}$ and measurable projections $\hat{E}\{- \mid L_2(G)\}$.

Bahadur [1] proved that for each $f \in L_2$, $\hat{E}\{f \mid L_2(G)\} = E\{f \mid G\}$. Then, conditional expectations as transformations in L_1 are extensions of measurable projections. However, a stronger result can be easily proved.

Theorem 4. *Conditional expectations are just uniquely defined continuous (in the mean of degree* 1, *i. e. in L_1) extensions (from L_2 to L_1) of all measurable projections.*

First of all we prove:

Lemma 2. *Let T, S be two transformations in L_1 that are continuous (in the mean of degree* 1*). If $T\{f\} = S\{f\}$ for each $f \in L_2$ then this equality holds for each $f \in L_1$ that means $T \equiv S$.*

Proof of lemma 2. If $f \in L_1$, let us define for each n natural $f_n(x) = \operatorname{sgn} f(x) \cdot \min(|f(x)|, n)$. Clearly, $f_n \in L_2$, $T\{f_n\} = S\{f_n\}$, $f_n \xrightarrow[1.]{} f$; hence, $T\{f\} = S\{f\}$.

Proof of theorem 4. Conditional expectation $E\{- \mid G\}$ is continuous in L_1 as is known, and it is an extension of the measurable projection $\hat{E}\{- \mid L_2(G)\}$.

Each measurable projection $\hat{E}\{- \mid L_2(G)\}$ can be extended to a conditional expectation $E\{- \mid G\}$ that is continuous. If $\hat{E}\{- \mid L_2(G)\}$ has another continuous extension T, by lemma 2 it follows that $T \equiv E\{- \mid G\}$.

4. Continuity properties of the correspondence between conditional expectations and measurable projections

In the study of conditional expectations, e. g. in the theory of martingales, almost sure convergence is used mostly. If we understand the convergence of conditional expectations in this way, while for projections we shall use the convergence in the mean of degree 2 that is, in L_2, the following theorem is true.

Theorem 5. *The correspondence between conditional expectations and measurable projec-*

tions is continuous. Exactly: if $E\{f \mid G_n\} \xrightarrow[a.s.]{} E\{f \mid G\}$ *for each* $f \in L_1$, *then* $\hat{E}\{f \mid L_2(G_n)\} \xrightarrow[2.]{} \hat{E}\{f \mid L_2(G)\}$ *for each* $f \in L_2$.

First of all we shall prove

Lemma 3. *Let us consider a random variable* $f \in L_1$ *and an arbitrary system of* σ*-algebras* $G_i \subset F$, $i \in I$. *Then, the integrals* $\int E\{f \mid G_i\}\, d\mu$ *considered as set functions are uniformly absolutely continuous.*

Proof of lemma 3. To begin with, let $f(x) \geqslant 0$ almost surely. Let us choose an arbitrary $\varepsilon > 0$. Since $\int f\, d\mu$ is an absolutely continuous set function, there exists an $\eta > 0$ such that $\mu(M) < \eta$ implies $\int_M f\, d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$. Since $f \in L_1$, there exists furthermore a number k such that $\mu\{x \in X;\ f(x) > k\} < \eta$. Now, let us define two functions f_1, f_2 as follows:

$$\text{if } f(x) > k, \text{ then } f_1(x) = f(x),\ f_2(x) = 0,$$

$$\text{if } f(x) \leqslant k, \text{ then } f_1(x) = 0, \quad f_2(x) = f(x).$$

We have $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$. It holds true that $0 \leqslant f_2(x) \leqslant k$, and therefore $0 \leqslant E\{f_2 \mid G_i\} \leqslant k$ for each $i \in I$. Let us denote $\delta = \frac{\varepsilon}{2k}$. If a set M has a measure $\mu(M) < \delta$, then for each $i \in I$

$$\int_M E\{f \mid G_i\}\, d\mu = \int_M E\{f_1 \mid G_i\}\, d\mu + \int_M E\{f_2 \mid G_i\}\, d\mu \leqslant \int_X E\{f_1 \mid G_i\}\, d\mu +$$

$$+ \int_M k \cdot d\mu = \int_X f_1\, d\mu + k \cdot \mu(M) \leqslant \int_{\{f(x) > k\}} f\, d\mu + k \cdot \frac{\varepsilon}{2k} < \varepsilon.$$

If $f \in L_1$ is arbitrary, we consider the functions $f^+ \geqslant 0$, $f^- \geqslant 0$, $f^+ - f^- = f$. For each $\varepsilon > 0$ there exists some $\delta_1 > 0$ such that $\mu(M) < \delta_1$ implies $\int_M E\{f^+ \mid G_i\}\, d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$, the result is similar for $\delta_2 > 0$, f^-. Let us choose $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. If $\mu(M) < \delta$, then for each $i \in I$ we obviously have

$$\int_M |E\{f \mid G_i\}|\, d\mu \leqslant \int_M E\{f^+ \mid G_i\}\, d\mu + \int_M E\{f^- \mid G\}\, d\mu < \varepsilon.$$

Proof of theorem 5. If $f \in L_2$ and G is an arbitrary δ-algebra as was shown in part 3 $\hat{E}\{f \mid L_2(G)\} = E\{f \mid G\}$. Therefore, with the above-mentioned assumptions we have to prove that $E\{f \mid G_n\} \xrightarrow[2.]{} E\{f \mid G\}$. Let $\varepsilon > 0$ be any real positive number. Since $f \in L_2$, by lemma 3 the integrals $\int E\{f^2 \mid G_n\}\, d\mu$, $\int E\{f^2 \mid G\}\, d\mu$ are uniformly absolutely continuous. This means that there exists a $\delta > 0$ such that $\mu(M) < \delta$ implies $\int_M E\{f^2 \mid G_n\}\, d\mu < \frac{\varepsilon}{6}$, $\int_M E\{f^2 \mid G\}\, d\mu < \frac{\varepsilon}{6}$. According to Egoroff's theorem (see e. g. Halmos [4]) and with the assumption of $E\{f \mid G_n\}$ converging almost surely, there exists a set M such that $\mu(M) < \delta$, and on the set $X - M$ the sequence $E\{f \mid G_n\}$ converges to $E\{f \mid G\}$ uniformly. Hence, there is a n_0 such that $|E\{f \mid G_n\} - E\{f \mid G\}| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}$ on the set $X - M$ for all $n > n_0$. Summing up, if we use the inequalities of Minkowski and Jessen we obtain for all $n > n_0$

$$\int (E\{f \mid G_n\} - E\{f \mid G\})^2\, d\mu = \int_M (E\{f \mid G_n\} - E\{f \mid G\})^2\, d\mu + \int_{X-M} (E\{f \mid G_n\} - E\{f \mid G\})^2\, d\mu \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sqrt{\int_M (E\{f \mid G_n\})^2\, d\mu} + \sqrt{\int_M (E\{f \mid G\})^2\, d\mu}\right)^2 + \int_{X-M} \frac{\varepsilon}{3} \cdot d\mu \leqslant \left(\sqrt{\int_M E\{f^2 \mid G_n\}\, d\mu} +\right.$$

$$\left. + \sqrt{\int_M E\{f^2 \mid G\}\, d\mu}\right)^2 + \frac{\varepsilon}{3} \cdot \mu(X - M) < \left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{6}} + \sqrt{\frac{\varepsilon}{6}}\right)^2 + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Theorem 5 is proved.

However, the inverse correspondence is not continuous as is seen from the following example.

Example. Let $X = [0, 1)$ with the Lebesgue measure μ. Let σ-algebra G contains the sets X, ϕ, and for each n natural σ-algebra G_n contains the sets X, ϕ, and

G_1 contains merely X, ϕ,

G_2 contains $\left[0, \frac{1}{2}\right)$, $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$

. . . . . .

C_{2^n-1} contains $\left[0, \frac{1}{2^n}\right)$, $\left[\frac{1}{2^n}, 1\right)$,

C_{2^n} contains $\left[\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}\right)$, $\left[0, \frac{1}{2^n}\right) \cup \left[\frac{2}{2^n}, 1\right)$,

. . . . . .

C_{2^n+1-2} contains $\left[\frac{2^n-1}{2^n}, 1\right)$, $\left[0, \frac{2^n-1}{2^n}\right)$,

in general for $n = 2, 3, 4, \ldots$, $k = 1, 2, 3, \ldots, 2^n$. G_{2^n-2+k} contains the sets X, ϕ, $\left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right)$, $\left[0, \frac{k-1}{2^n}\right) \cup \left[\frac{k}{2^n}, 1\right)$. Now, let us consider the function $f(x) = \operatorname{sgn}\left(x - \frac{1}{2}\right)$. It is almost surely $E\{f \mid G\} = 0$; for $n \geqslant 2$ the following equalities can be easily proved:

for $k = 1, 2, \ldots, 2^{n-1}$ we have $E\{f \mid G_{2^n-2+k}\} = -1$ on $\left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right)$,

$$= \frac{1}{2^n - 1} \text{ on } \left[0, \frac{k-1}{2^n}\right) \cup \left[\frac{k}{2^n}, 1\right),$$

for $k = 2^{n-1} + 1, 2^{n-1} + 2 \ldots, 2^n$ we have $E\{f \mid G_{2^n-2+k}\} = 1$ on $\left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right)$,

$$= -\frac{1}{2^n - 1} \text{ on } \left[0, \frac{k-1}{2^n}\right) \cup \left[\frac{k}{2^n}, 1\right).$$

Hence, for each $x \in X$ there exists some subsequence $E\{f \mid G_i\} \xrightarrow[a.\,s.]{} \operatorname{sgn}\left(x - \frac{1}{2}\right)$, and also some subsequence $E\{f \mid G_j\} \xrightarrow[a.\,s.]{} 0$. Therefore, $E\{f \mid G_n\}$ does not converge for any $x \in X$. However, it is easy to prove that $E\{f \mid G_n\} \xrightarrow[2.]{} E\{f \mid G\}$.

5. Characterization of conditional expectations in L_2.

Recently Shu-Teh Chen Moy [5] and Bahadur [1] have studied the characterization of conditional expectations as transformations on function spaces. A similar result can be immediately obtained from our theorems.

Theorem 6. *A transformation T on Hilbert space L_2 into itself is a conditional expectation (in a strict sense, to avoid misunderstanding), if, and only if, it satisfies the following conditions*: (0) *T is self-adjoint and idempotent (i. e. $T^2 \equiv T$);* (1) *$T\{1\} = 1$;* (2) *If $f \in L_2$, $g \in L_2$, then $T\{\max(T\{f\}, T\{g\})\} = \max(T\{f\}, T\{g\})$.*

Proof. As is well known (see e. g. Stone [6]), condition (0) implies that T is a projection on some closed linear manifold $\mathfrak{M}$. By conditions (1) and (2), $\mathfrak{M}$ is a measurable subspace $L_2(G)$ and therefore $T = E\{- \mid \mathfrak{M}\} = E\{- \mid G\}$.

Поступила в редакцию
17. 10. 56

BIBLIOGRAPHY

[1] R. R. Bahadur, Measurable subspaces and subalgebras, Proc. Am. Math. Soc., 6 (1955), 565—570.
[2] G. Birkhoff, Lattice Theory, New York, 1948.
[3] J. L. Doob, Stochastic Processes, New York, 1953.
[4] P. R. Halmos, Measure Theory, New York, 1950.
[5] Shu-Teh Chen Moy, Characterizations of conditional expectation as a transformation on function spaces, Pacific J. of Math., 4 (1954), 47—63.
[6] M. H. Stone, Linear transformations in Hilbert space, New York, 1932.

ОБ ОТНОШЕНИЯХ МЕЖДУ УСЛОВНЫМИ МАТЕМАТИЧЕСКИМИ ОЖИДАНИЯМИ В УЗКОМ СМЫСЛЕ И В ШИРОКОМ СМЫСЛЕ

ЗБЫНЕК ШИДАК (ПРАГА)

(Резюме)

В статье исследуются отношения между условными математическими ожиданиями в узком смысле (т. е. обыкновенными условными математическими ожиданиями) и в широком смысле (т. е. проекциями гильбертова пространства L_2 на некоторое замкнутое линейное подпространство), как они определены Дубом [3].

Пусть (X, F, μ)— пространство вероятностей и $G \subset F$—некоторая σ-алгебра. Обозначим $L_2(G)$ систему всех G-измеримых случайных величин из L_2. Такие подпространства $L_2(G)$ мы будем называть с Багадуром [1] измеримыми подпространствами и проекции на них измеримыми проекциями.

Главным результатом статьи является следующая

Теорема 3. *Система* $\mathfrak{M} \subset L_2$ *является измеримым подпространством тогда и только тогда, когда она удовлетворяет следующим условиям:*

(0) $\mathfrak{M}$ *— замкнутое линейное подпространство,*

(1) $1 \in \mathfrak{M}$,

(2) *если* $f \in \mathfrak{M}$, $g \in \mathfrak{M}$, *то* $\max(f, g) \in \mathfrak{M}$.

В статьях, опубликованных до сих пор, пользуются операцией умножения двух функций, но она вводится только для ограниченных функций, чтобы устранить некоторые затруднения, с этим связанные. В отличие от этого в настоящей статье используется операция образования максимума двух функций, приведенная в условии (2). Это условие дает некоторые упрощения и естественно приводит к понятию банаховой структуры.

Далее изучаются расширения измеримых проекций на условные ожидания и проблемы непрерывности их отображения. Используя для условных ожиданий сходимость почти всюду и для проекций сходимость в L_2, приходим к следующему выводу: отображение условных ожиданий на измеримые проекции непрерывно, между тем как обратное отображение не непрерывно, как показывается примером.

Применяя основную теорему 3, приходим к новой системе условий, характеризующих условные математические ожидания как преобразования функционального пространства.

ВНИМАНИЮ АВТОРОВ

1. Журнал «Теория вероятностей и ее применения» принимает оригинальные статьи и краткие сообщения по теории вероятностей, общим вопросам математической статистики и применениям теории вероятностей в естествознании и в технике. Статьи по прикладным вопросам принимаются лишь в случае существенной новизны применяемых математических методов.

2. Статьи и краткие сообщения печатаются на русском языке с резюме на английском, немецком или французском языках или на английском, немецком, французском языках с резюме на русском языке.

3. Рукопись представляется в двух экземплярах, напечатанной на машинке через 2 интервала на одной стороне листа с указанием адреса автора. Редакция просит в оформлении цитируемой литературы придерживаться порядка, принятого в журнале.

4. Авторам статей высылаются 50 оттисков.

5. Статьи следует направлять по адресу: Москва В-234, МГУ, Механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, или Киев, площадь Калинина, 6, Институт математики АН УССР.

NOTE TO AUTHORS

1. The journal „The Theory of Probability and Its Applications" accepts-original articles and communications on the theory of probability, general problems of mathematical statistics and applications of the theory of probability to natural science and technology. Articles of the letter kind will be accepted only if the mathematical methods applied are essentially new.

2. Articles and communications will be published either in Russian with summaries in English, German or French, or in English, German or French with summaries in Russian.

3. All contributions should be sent in two copies, which are typewritten only on one side of the sheet with double spaces. References to books and articles cited should conform to the standard adopted by the publishers.

4. The authors will be sent 50 copies of their articles.

5. Authors are requested to address their contributions: Moscow, B-234, MGU (State University), Department of Mathematics and Mechanics; or to Kiev, Kalinin Square, 6, Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR.

Подписано к печати 16/X—1957 г. Формат бумаги $70\times108^{1}/_{16}$. Бум. л. 4,5 Печ. л. 12,33
Уч. изд. 12,1 Тираж 2025 экз. Зак. 1954. Т-08957

2-я типография Издательства АН СССР. Москва, Шубинский пер., д. 10

Цена ~~11 р. 25 к.~~ 2-25

1-13

ОТКРЫТА ПОДПИСКА

на журналы

АКАДЕМИИ НАУК СССР НА 1958 год

Название журнала	Количество номеров в год	Годовая подписная цена (в рублях)
Автоматика и телемеханика	12	108
Акустический журнал	4	36
Астрономический журнал	6	90
Биофизика	6	72
Биохимия	6	90
Ботанический журнал	12	180
Вестник Академии наук СССР	12	96
Вестник древней истории	4	96
Вопросы языкознания	6	72
Геохимия	8	72
Доклады Академии наук СССР (без папок)	36	360
Доклады Академии наук СССР (с 6 коленкоровыми папками с тиснением)	36	384
Журнал аналитической химии	6	72
Журнал высшей нервной деятельности им. И. П. Павлова	6	90
Журнал научной и прикладной фотографии и кинематографии	6	45
Журнал неорганической химии	12	270
Журнал общей биологии	6	45
Журнал общей химии	12	270
Журнал прикладной химии	12	180
Журнал технической физики	12	225
Журнал физической химии	12	270
Журнал экспериментальной и теоретической физики	12	288
Записки Всесоюзного минералогического общества	6	72
Зоологический журнал	12	180
Известия Всесоюзного географического общества	6	54
Исторический архив	6	90
Исторический архив в переплете	6	99
История СССР	6	72
Коллоидный журнал	6	72
Кристаллография	6	72
Математический сборник	12	144
Микробиология	6	72
Новая и новейшая история	6	60
Оптика и спектроскопия	12	144
Почвоведение	12	144
Приборы и техника эксперимента	6	72
Прикладная математика и механика	6	81
Природа	12	84
Радиотехника и электроника	12	144
Русская литература	4	40
Советская археология	4	100
Советская этнография	6	108
Советское востоковедение	6	72
Советское государство и право	12	144
Современный Восток	12	36
Теория вероятностей и ее применения	4	45
Успехи математических наук	6	96
Успехи современной биологии	6	48
Успехи физических наук	12	144
Успехи химии	12	96
Физика металлов и металловедение	6	90
Физиологический журнал СССР им. И. М. Сеченова	12	108
Физиология растений	6	54
Энтомологическое обозрение	4	90
Известия Академии наук СССР:		
Отделение литературы и языка	6	54
Отделение технических наук	12	180
Отделение химических наук	12	126
Серия биологическая	6	72
Серия географическая	6	90
Серия геологическая	12	144
Серия геофизическая	12	144
Серия математическая	6	81
Серия физическая	12	144
Реферативный журнал, серии:		
Астрономия и геодезия	12	115.20
Биология (сводный том) *	24	691.20
География (сводный том) *	12	288
Геология (сводный том) *	12	288
Математика	12	172.80
Машиностроение (сводный том) *	24	734.40
Металлургия (сводный том) *	12	504
Механика	12	172.80
Физика	12	360
Геофизика	12	115.20
Химия (сводный том) *	24	756
Биологическая химия	24	216
Электротехника	24	480

Примечание. Серии Реферативного журнала, помеченные звездочкой, издаются одновременно как отдельными выпусками, так и в виде сводного тома. Условия подписки на отдельные выпуски Реферативного журнала имеются в проспектах «Союзпечати».

ГОДОВАЯ И ПОЛУГОДОВАЯ ПОДПИСКА
ПРИНИМАЕТСЯ В ГОРОДСКИХ ОТДЕЛАХ «СОЮЗПЕЧАТЬ», КОНТОРАХ И ОТДЕЛЕНИЯХ СВЯЗИ, В ПУНКТАХ ПОДПИСКИ И ОБЩЕСТВЕННЫМИ УПОЛНОМОЧЕННЫМИ НА ЗАВОДАХ И ФАБРИКАХ, В НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ ИНСТИТУТАХ, УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЯХ, УЧРЕЖДЕНИЯХ И ОРГАНИЗАЦИЯХ.
ПОДПИСКА ПРИНИМАЕТСЯ ТАКЖЕ В МАГАЗИНАХ «АКАДЕМКНИГА», А ТАКЖЕ КОНТОРОЙ «АКАДЕМКНИГА» — МОСКВА, ПУШКИНСКАЯ УЛ., Д. 23